2 Modelos de Programação Linear

Conteúdos do Capítulo

- Problemas de Programação Linear
  - Resolução pelo método gráfico
  - O Problema do Pintor
  - Minimização
  - Restrições Redundantes
  - Solução Múltipla, Ilimitada e Inviável
- Casos
  - Caso Alumilâminas S.A.
  - Caso Esportes Radicais S.A
  - Problema da Fazenda
  - Problema da Mistura
  - Problema da Dieta
  - Problema do Estoqu
- Análise de sensibilidade

Programação Matemática

- Um problema de programação matemática é um problema de otimização no qual o objetivo e as restrições são expressos como funções matemáticas e relações funcionais.

$$\text{Otimizar} \quad : \; z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\text{Sujeito a} : \begin{array}{c} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ a \\ a \end{array}}\right\} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \left\{\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array}\right.$$

Variáveis de Decisão

- $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$, são as chamadas **Variáveis de Decisão**.
- As variáveis de decisão são aqueles valores que representam o cerne do problema, e que podemos escolher (decidir) livremente.
- As variáveis de decisão representam as opções que um administrador têm para atingir um objetivo.
  - Quanto produzir para maximizar o lucro?
  - Quanto comprar de uma ação para minimizar o risco da carteira?

Programação Linear

- Um problema de programação matemática é linear se a função objetivo e cada uma das funções que representam as restrições forem lineares, isto é, na forma abaixo:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n$$

Quebrando a Linearidade

- A presença de qualquer das expressões abaixo tornam o problema não linear.
  - Exemplos:

$(x_1)^n$ para $n \neq 1$

$\log_a(x_1)$ para qualquer base a

a^{x_1} para qualquer valor de a

Exemplos

$$\begin{array}{l|l}
\max x_1 + x_2 & \min x_1 + 2x_2 \\
\text{s.r.} & \text{s.r.} \\
2x_1 + 4x_2 \leq 20 & 2x_1 + 3x_2 \geq 20 \\
180x_1 + 20x_2 \leq 600 & 180x_1 + 20x_2 = 600 \\
x_1, x_2 \geq 0 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}$$

Programação Linear

Áreas de Aplicação

- Administração da Produção
- Análise de Investimentos
- Alocação de Recursos Limitados
- Planejamento Regional
- Logística
  - Custo de transporte
  - Localização de rede de distribuição
- Alocação de Recursos em *Marketing* entre diversos meios de comunicação.

Problema na Forma Padrão

- Existem 4 características para um problema na forma padrão:
  - A função objetivo é de Maximizar;
  - As restrições têm sinal de menor ou igual;
  - As constantes de todas as restrições são não negativas;
  - As variáveis podem assumir valores não negativos.

$$\boxed{\text{Maximizar}} \quad Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

Sujeito a :

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \le b_2 \\ \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m \end{array} \xrightarrow{} \textbf{Não negativos}$$

$$\boxed{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ge 0}$$

Propriedades

Hipótese de Aditividade

Considera as atividades (variáveis de decisão) do modelo como entidades totalmente independentes, **não** permitindo que haja **interdependência** entre as mesmas, isto é, não permitindo a existência de termos cruzados, tanto na função-objetivo como nas restrições. **Esta é a própria hipótese de linearidade do PPL**

Hipótese de Proporcionalidade

O valor da função-objetivo é proporcional ao nível de atividade de cada variável de decisão, isto é, o valor da função objetivo se altera de um valor constante dada uma variação constante da variável de decisão;

Hipótese de Divisibilidade

Assume que todas as unidades de atividade possam ser divididas em qualquer nível fracional, isto é, qualquer variável de decisão pode assumir qualquer valor positivo fracionário.
Esta hipótese pode ser quebrada, dando origem a um problema especial de programação linear, chamado de **problema combinatório**.

Hipótese de Certeza

Assume que todos os parâmetros do modelo são constantes conhecidas. Em problemas reais, isto é quase nunca satisfeito, em geral, constantes são estimadas. Requer uma análise de sensibilidade, sobre o que falaremos posteriormente.

Terminologia

Solução: No campo de Programação Linear é qualquer especificação de valores para as variáveis de decisão, não importando se esta especificação se trata de uma escolha desejável ou permissível.

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

s.r.

$$2x_1 + 4x_2 \leq 20$$

$$180x_1 + 100x_2 \leq 800$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$x_1 = 3$; $x_2 = 2$ $S = (3,2)$

$x_1 = 3$; $x_2 = 4$ $S = (3,4)$

- Solução Viável: É uma solução em que todas as restrições são satisfeitas;
- Solução Inviável: É uma solução em que alguma das restrições ou as condições de não-negatividade não são atendidas;

Exemplos de Solução Viável e Inviável

$x_1 = 3$; $x_2 = 2$

S = (3, 2)

solução viável: todas as restrições não são violadas

$x_1 = 3$; $x_2 = 4$

S = (3, 4)

solução inviável: as restrições são violadas

- Valor de Função-Objetivo: o conjunto de possíveis soluções viáveis corresponde a um conjunto de valores de função-objetivo.

$$\max\ z = x_1 + x_2$$
s.r.
$$2x_1 + 4x_2 \leq 20$$
$$180\,x_1 + 100\,x_2 \leq 800$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$S = (1,1) \Rightarrow Z = 2$$
$$S = (2,1) \Rightarrow Z = 3$$
$$S = (3,2) \Rightarrow Z = 5$$

Solução ótima é aquela, dentre todas as soluções viáveis, que produz o melhor (menor ou maior) valor da função objetivo.

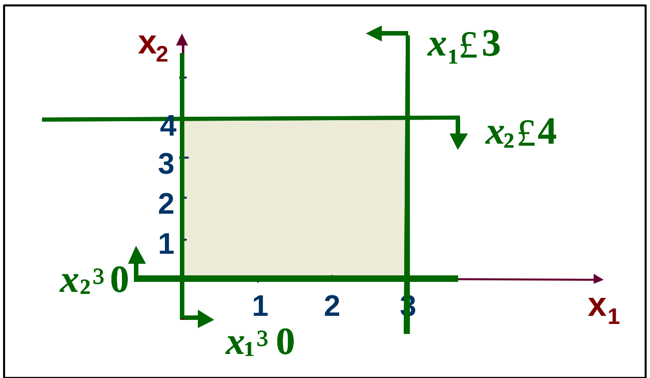
- Algoritmos (ou métodos algorítmicos) que buscam, dentre todas as soluções viáveis, por uma solução em especial podem ser chamados de algoritmos de busca.
  - Observação (1): Em Inteligência artificial, costuma-se estudar algoritmos de busca em espaço de estados. Existem algoritmos de busca em largura, em profundidade e heurísticos.
- Muitas vezes uma solução aproximada (segundo critérios subjetivos de qualidade) satisfaz requisitos operacionais e pode ser obtida com esforço computacional menor. Neste caso, algoritmos heurísticos, também conhecidos como algoritmos aproximativos, são uma opção bastante interessante.
- O conjunto de soluções viáveis forma o que é chamado de espaço de busca de um determinado problema.
- O espaço de busca pode ser entendido como uma discretização do espaço real de soluções do problema. A maioria dos métodos de otimização trabalham sobre o espaço de busca e não sobre o espaço real.

Solução gráfica

- Quando o problema envolve apenas duas variáveis de decisão, a solução ótima de um problema de programação linear pode ser encontrada graficamente.
- Com poucas variáveis, métodos exatos ou enumerativos produzem soluções ótimas em tempo computacional razoável
- Com muitas variáveis, métodos aproximativos são indicados.

Exemplo(1)

$$\begin{array}{lrl}
Max & Z = 5x_1 + 2x_2 & \\
s.r. & x_1 \leq 3 & (a) \\
 & x_2 \leq 4 & (b) \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 9 & (c) \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & (d)
\end{array}$$



$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

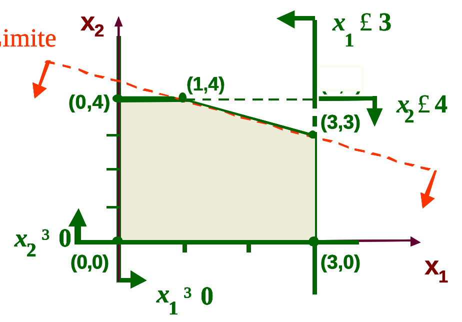
$$x_1 + 2x_2 = 9 \quad \text{Reta Limite}$$

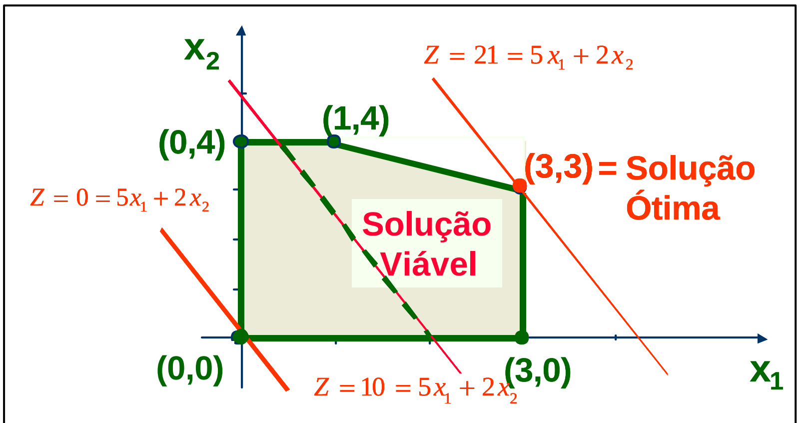
$$2x_2 = 9 - x_1$$

$$x_2 = \tfrac{9}{2} - \tfrac{1}{2}x_1$$

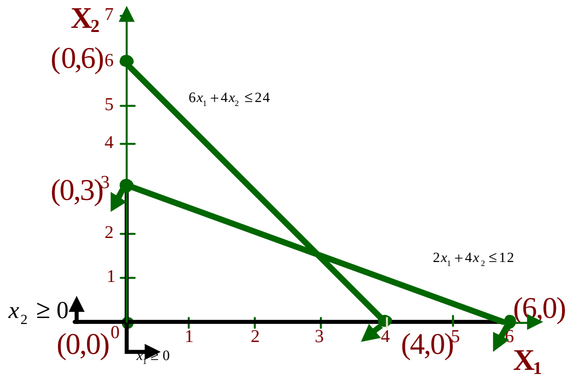
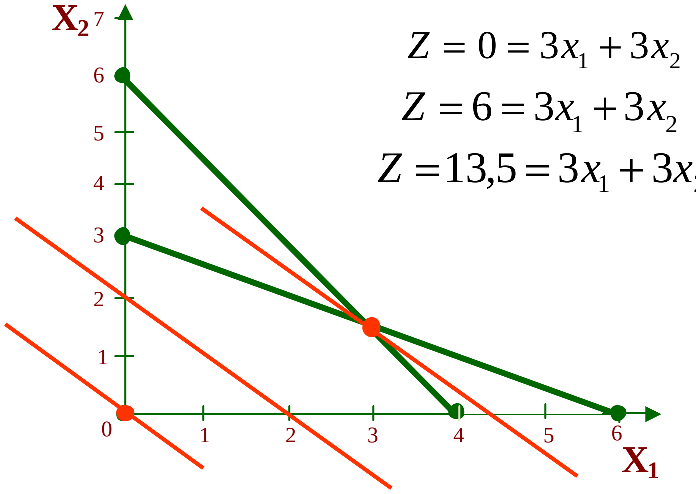
$$x_2 \leq \tfrac{9}{2} - \tfrac{1}{2}x_1$$

Região Limitada

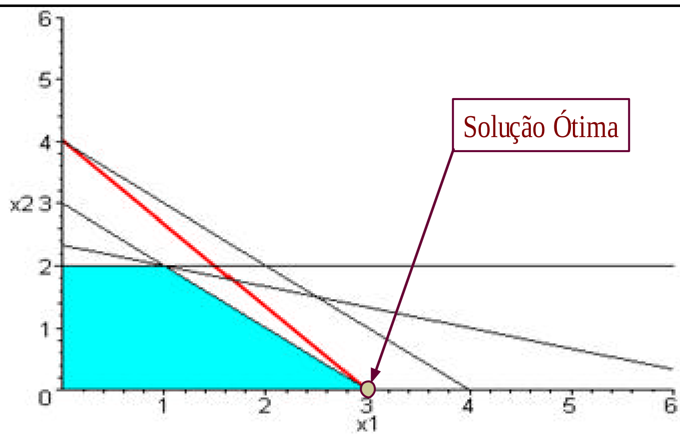




Exemplo(2)

$Max\ 3x_1 + 3x_2$ $s.t.\quad 2x_1 + 4x_2 \le 12$ $6x_1 + 4x_2 \le 24$ $x_1, x_2 \ge 0$	
	 $Z = 0 = 3x_1 + 3x_2$ $Z = 6 = 3x_1 + 3x_2$ $Z = 13{,}5 = 3x_1 + 3x_2$

Exemplo(3)

Max $4x_1 + 3x_2$ s.t. $x_1 + 3x_2 \le 7$ $2x_1 + 2x_2 \le 8$ $x_1 + x_2 \le 3$ $x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$	

Exemplo(4)

Maximizar $4x_1 + 8x_2$

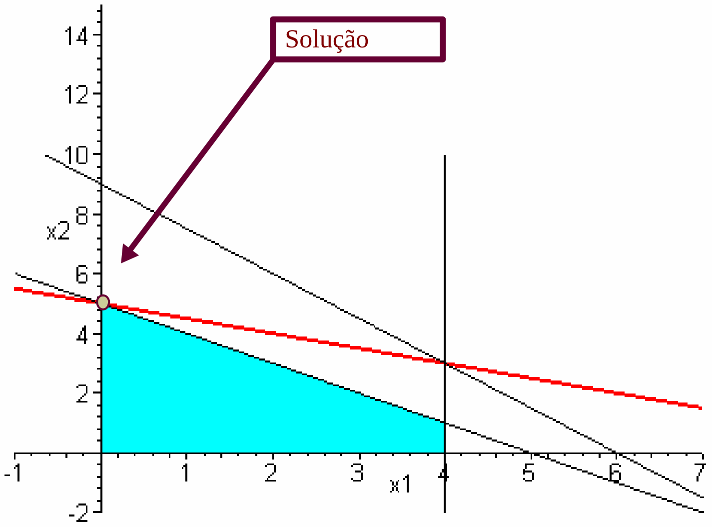
st

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$



Exemplo (5)

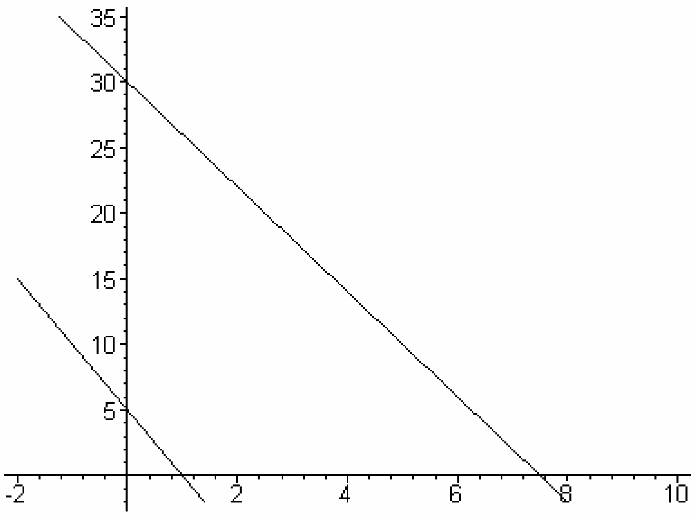
Maximizar $x_1 + 3x_2$

st

$4x_1 + x_2 \geq 30$

$16x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$



O Problema do Pintor

- Um Pintor faz quadros artesanais para vender numa feira que acontece todo dia à noite. Ele faz quadros grandes e desenhos pequenos, e os vende por R$5,00 e R$3,00, respectivamente. Ele só consegue vender 3 quadros grandes e 4 quadros pequenos por noite. O quadro grande é feito em uma hora (grosseiro) e o pequeno é feito em 1 hora e 48 minutos (detalhado). O desenhista desenha 8 horas por dia antes de ir para a feira. Quantos quadros de cada tipo ele deve pintar para maximizar a sua receita?

A Decisão do Pintor

- O que o desenhista precisa decidir?
- O que ele pode fazer para aumentar ou diminuir a sua receita?
- **A decisão dele é como usar as 8 horas diárias: quantos desenhos pequenos e grandes ele deve fazer?**
- Função Objetivo: maximizar a receita

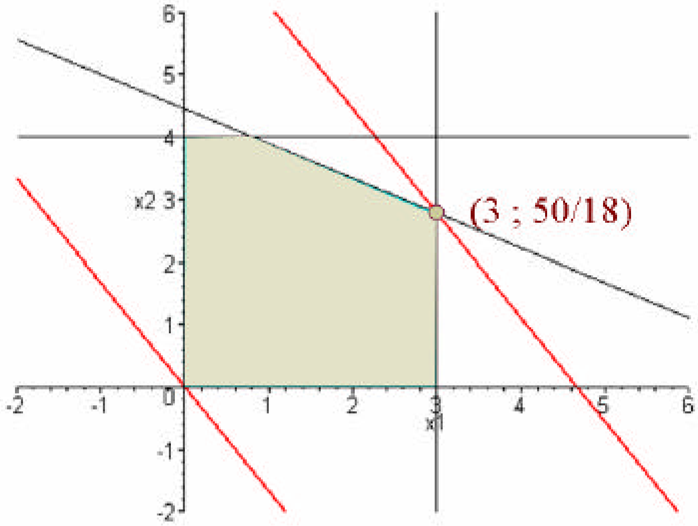
$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

$$s.r. \quad x_1 \le 3$$

$$x_2 \le 4$$

$$x_1 + 1{,}8x_2 \le 8$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$



$$z = 0 = 5x_1 + 3x_2$$

$$\Updownarrow$$

$$x_2 = -\tfrac{5}{3}x_1$$

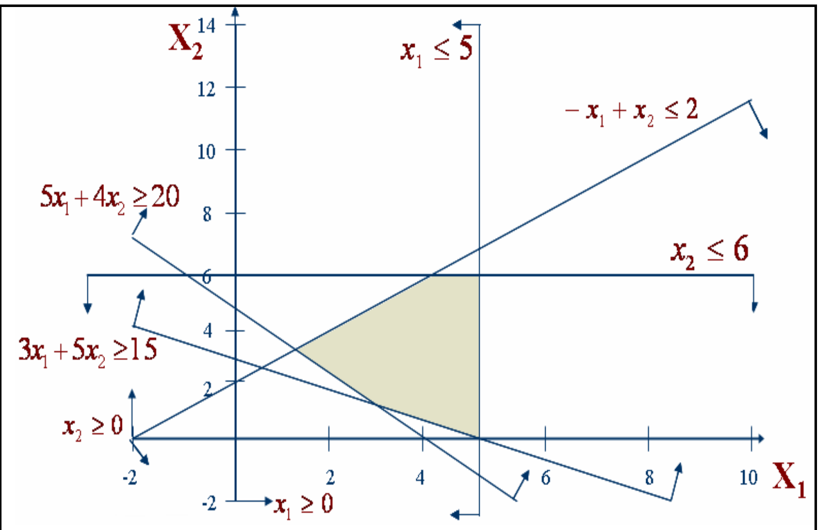
$$z = \tfrac{70}{3} = 5x_1 + 3x_2$$

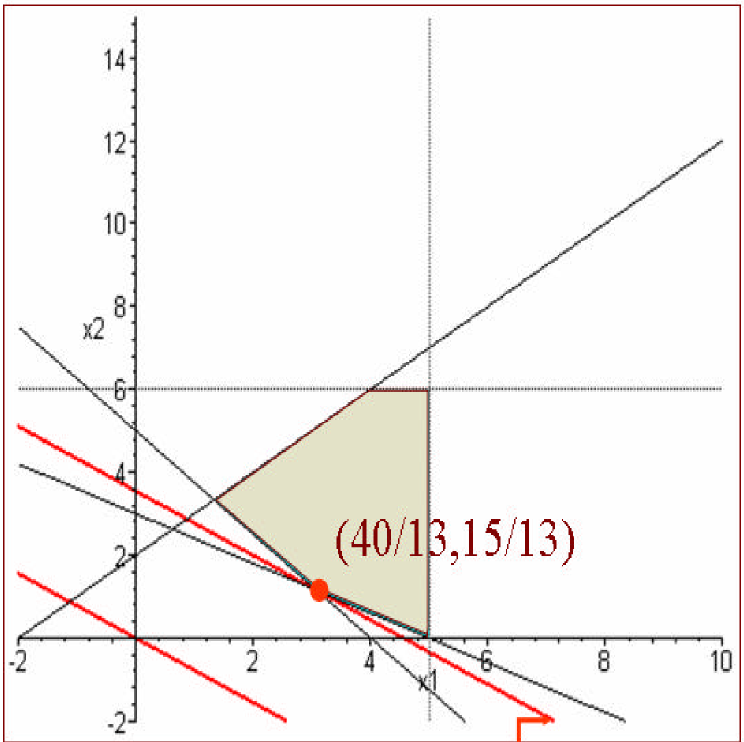
$$\Updownarrow$$

$$x_2 = -\tfrac{5}{3}x_1 + \tfrac{70}{9}$$

◆ Exemplo (7):

$$\begin{aligned} Min \quad & 7x_1 + 9x_2 \\ s.t. \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ & 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$





$$z = 0 = 7x_1 + 9x_2$$

$$\Updownarrow$$

$$x_2 = -\tfrac{7}{9}x_1$$

$$z = \tfrac{415}{65} = 7x_1 + 9x_2$$

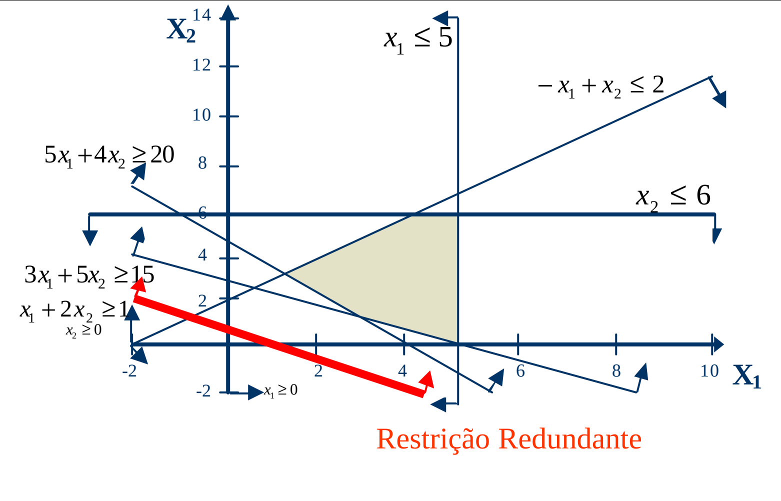
$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x_2 = -\tfrac{7}{9}x_1 + \tfrac{415}{117}}$$

- **Restrições redundantes**
  - Uma restrição é dita redundante quando a sua exclusão do conjunto de restrições de um problema não altera o conjunto de soluções viáveis deste.
  - É uma restrição que não participa da determinação do conjunto de soluções viáveis.
  - Existe um outro problema sem essa restrição com a mesma solução ótima.

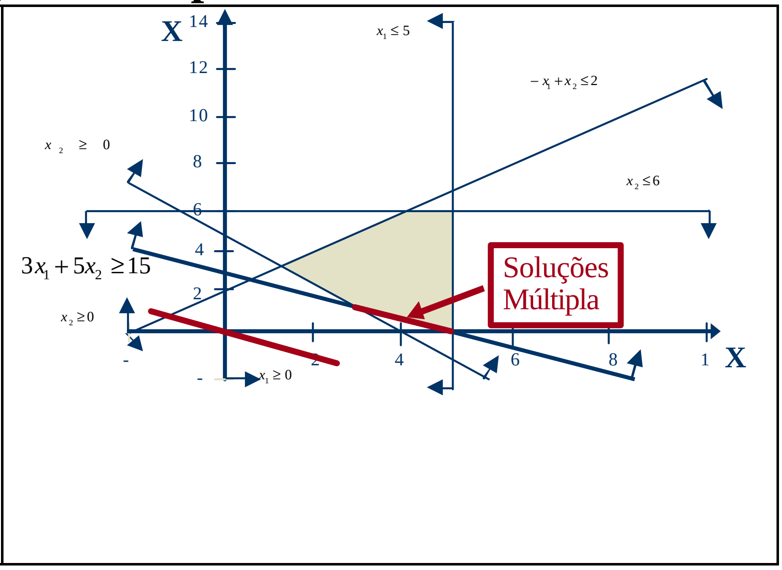
Exemplo (8): Restrições redundantes

$$
\begin{aligned}
Min \quad & 6x_1 + 10x_2 \\
s.t. \quad & -x_1 + x_2 \le 2 \\
& x_1 + 2x_2 \ge 1 \\
& x_1 \le 5 \\
& x_2 \le 6 \\
& 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\
& 5x_1 + 4x_2 \ge 20 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



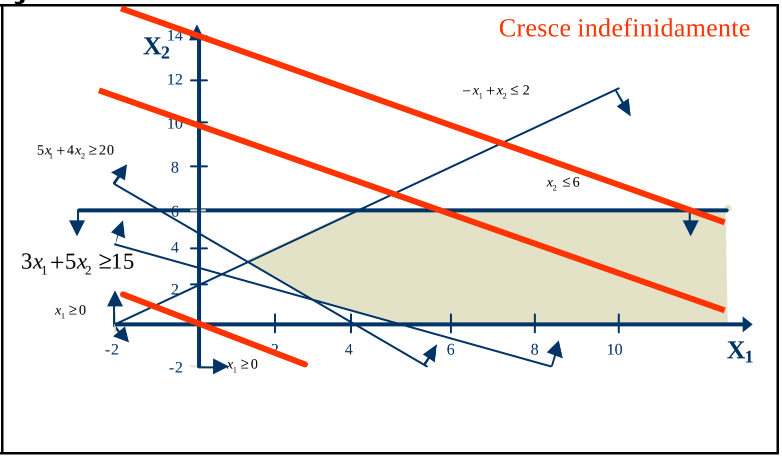
Exemplo (9): Soluções múltiplas

$$
\begin{aligned}
Min \quad & 6x_1 + 10x_2 \\
s.t. \quad & -x_1 + x_2 \le 2 \\
& x_1 \le 5 \\
& x_2 \le 6 \\
& 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\
& 5x_1 + 4x_2 \ge 20 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



Exemplo (10): Solução ilimitada

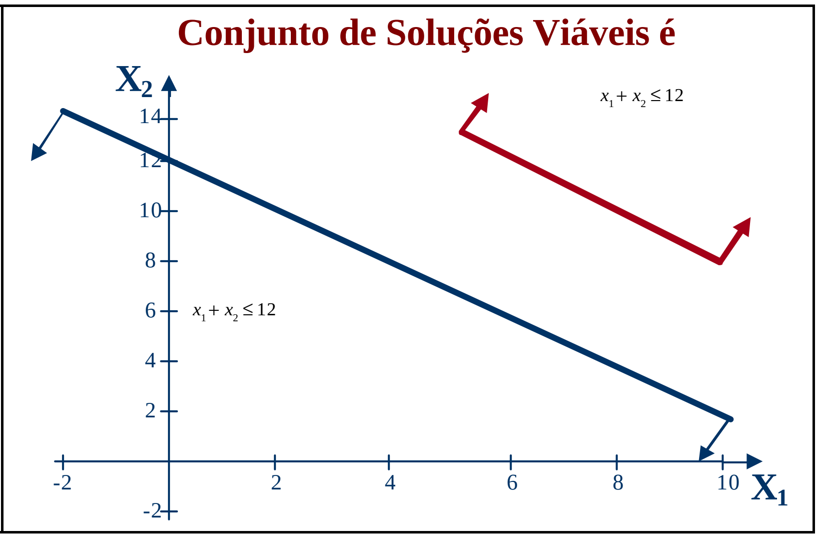
$$
\begin{aligned}
Max \quad & 6x_1 + 10x_2 \\
s.t. \quad & -x_1 + x_2 \le 2 \\
& x_2 \le 6 \\
& 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\
& 5x_1 + 4x_2 \ge 20 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



- **Solução Inviável**
- Um problema de programação linear é dito inviável quando o conjunto de soluções viáveis é vazio.

- **Exemplo (11):**

$$
\begin{aligned}
Max \quad & x_1 + x_2 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 \le 12 \\
& x_1 + x_2 \ge 20 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



Caso Alumilâminas S.A.

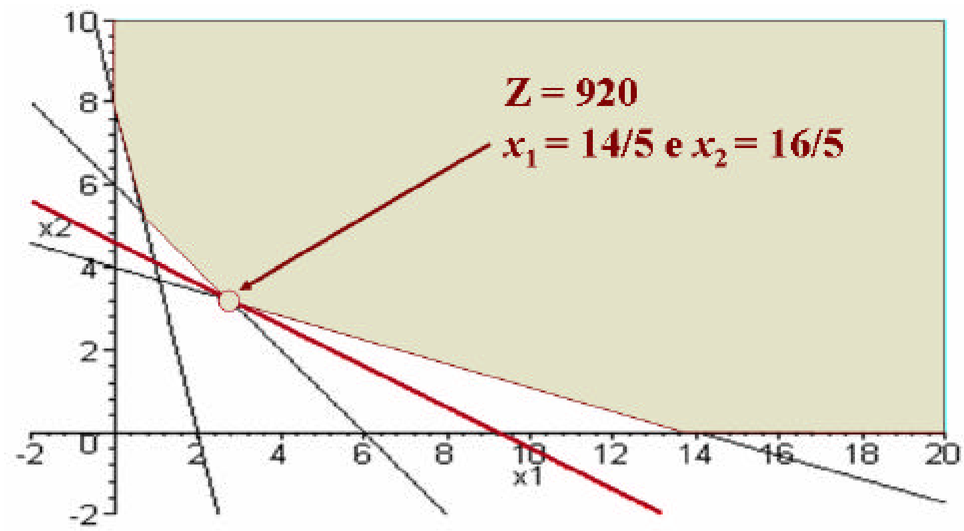
- A indústria Alumilâminas S/A iniciou suas operações em janeiro de 2001 e já vem conquistando espaço no mercado de laminados brasileiro, tendo contratos fechados de fornecimento para todos os 3 tipos diferentes de lâminas de alumínio que fabrica: espessura fina, média ou grossa. Toda a produção da companhia é realizada em duas fábricas, uma localizada em São Paulo e a outra no Rio de Janeiro. Segundo os contratos fechados, a empresa precisa entregar 16 toneladas de lâminas finas, 6 toneladas de lâminas médias e 28 toneladas de lâminas grossas. Devido à qualidade dos produtos da Alumilâminas S/A, há uma demanda extra para cada tipo de lâmina. A fábrica de São Paulo tem um custo de produção de R$ 100.000,00 para uma capacidade produtiva de 8 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 2 toneladas de lâminas grossas por dia. O custo de produção diário da fábrica do Rio de Janeiro é de R$ 200.000,00 para uma produção de 2 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 7 toneladas de lâminas grossas. Quantos dias cada uma das fábricas deverá operar para atender os pedidos ao menor custo possível? (resolva pela análise gráfica – deslocamento da função objetivo).
- **Variáveis de Decisão**
  - **$X1$ – Quantos dias de funcionamento da Fábrica de São Paulo**
  - **$X2$ – Quantos dias de funcionamento da Fábrica do Rio de Janeiro**

- **Função-Objetivo**
  - **Minimizar Custo de Produção (mil R\$) = 100 x_1 + 200 x_2**

- **Restrições de Demanda**
  - **Placas Finas** $8x_1 + 2x_2 \geq 16$
  - **Placas Médias** $1x_1 + 1x_2 \geq 6$
  - **Placas Grossas** $2x_1 + 7x_2 \geq 28$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- **Restrições de Não Negatividade**



Caso Esportes Radicais S.A.

- A Esportes Radicais S/A produz pára-quedas e asa-deltas em duas linhas de montagem. A primeira linha de montagem tem 100 horas semanais disponíveis para a fabricação dos produtos, e a segunda linha tem um limite de 42 horas semanais. Cada um dos produtos requer 10 horas de processamento na linha 1, enquanto que na linha 2 o pára-quedas requer 3 horas e a asa-delta requer 7 horas. Sabendo que o mercado está disposto a comprar toda a produção da empresa, bem como que o lucro pela venda de cada pára-quedas é de R$ 60,00 e o lucro para cada asa-delta vendida é R$ 40,00, encontre a programação de produção que maximize o lucro da Esportes Radicais S/A. (resolva pela análise gráfica – deslocamento da função objetivo).

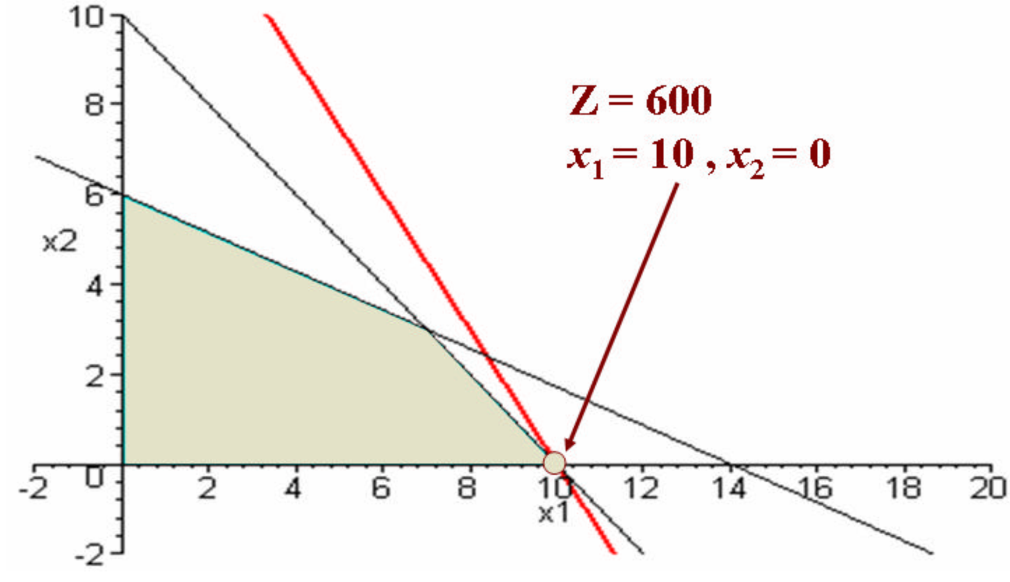
- Variáveis de Decisão
  - X_1 – Quantidade de Pára-Quedas a serem produzidos
  - X_2 – Quantidade de Asa Deltas a serem produzidos
- Função-objetivo
  - Max $60x_1 + 40x_2$

$$Max\ \ 60x_1 + 40x_2$$

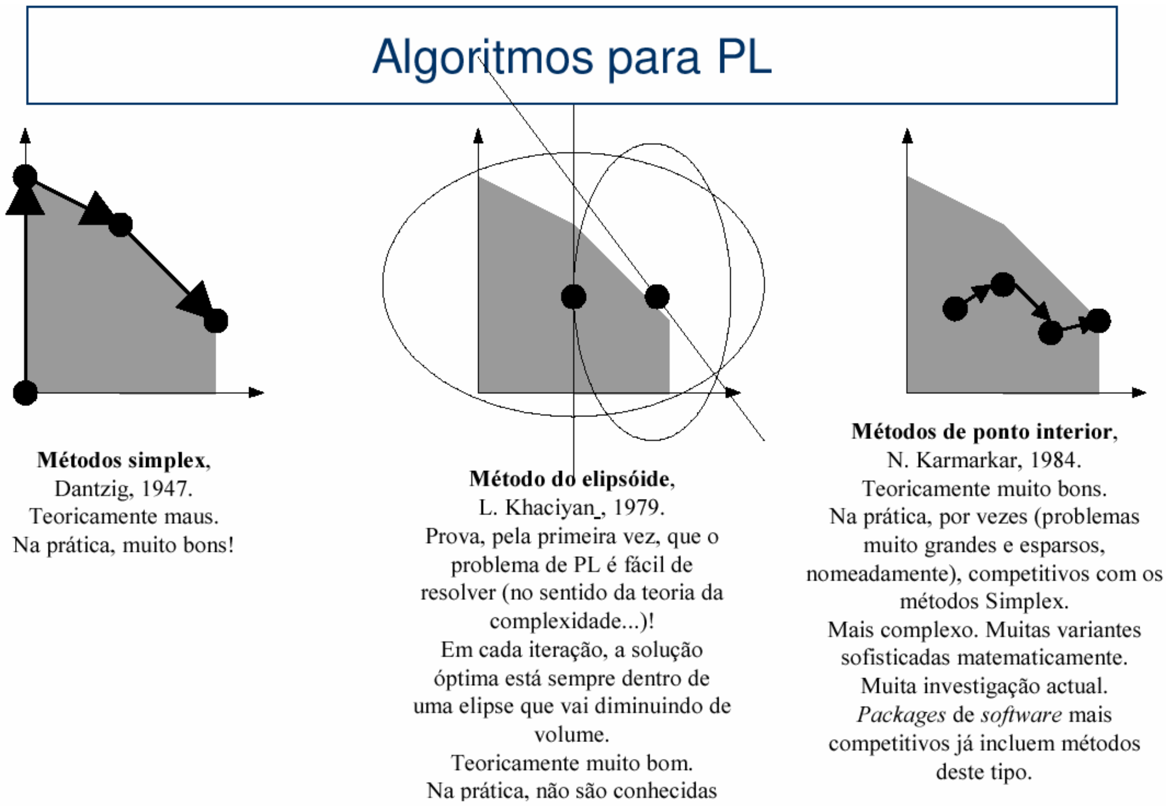
$$10x_1 + 10x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 7x_2 \leq 42$$

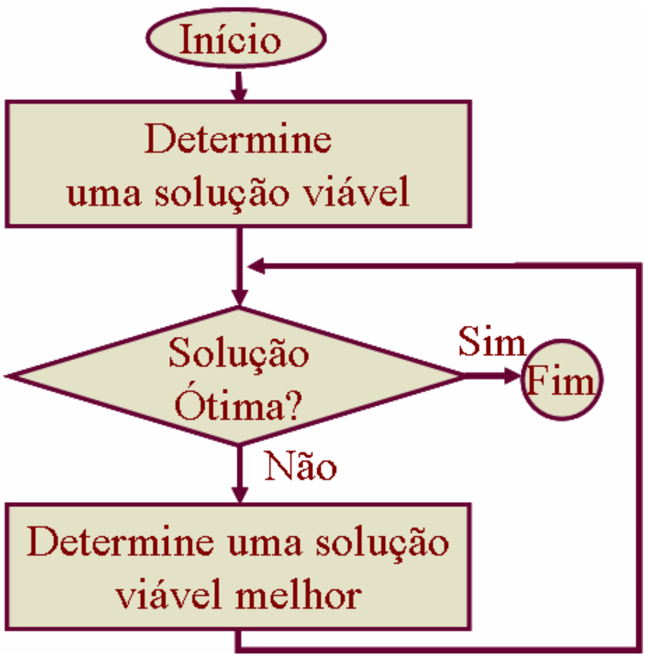
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Solução Analítica



- **Problemas de Programação Linear**



Solução Analítica

- Solução viável inicial

- Problema Forma Padrão

$$Max\ 60x_1 + 40x_2$$
$$10x_1 + 10x_2 \leq 100$$
$$3x_1 + 7x_2 \leq 42$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Dicionário Inicial

$$x_3 = 100 - 10x_1 - 10x_2$$
$$x_4 = 42 - 3x_1 - 7x_2$$
$$z = 60x_1 + 40x_2$$
$$x_1, x_2, \boxed{x_3, x_4} \geq 0$$

Variáveis de Folga

- Dicionário Inicial

$$x_3 = 100 - 10x_1 - 10x_2$$
$$x_4 = 42 - 3x_1 - 7x_2$$
$$z = 60x_1 + 40x_2$$
$$\underbrace{x_1, x_2}_{\text{não básicas}}, \underbrace{x_3, x_4}_{\text{básicas}} \geq 0$$

- Uma solução viável inicial é obtida considerando-se zero todas as variáveis não básicas:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 100$$
$$x_4 = 42$$

Z=0

- Decisão de otimalidade

A solução não é ótima, já que o incremento de uma das variáveis não básicas fará com que o valor da função-objetiva seja aumentado.

- Enquanto dentre essas variáveis existir alguma que tiver coeficiente positivo, isso significa dizer que a solução atual pode ser melhorada.

Solução Analítica

- Obtenha uma solução viável melhor baseado em algum critério
  a) Enumerativo: inspecionar todas as soluções viáveis;
  b) Heurístico: verificar uma que tenha grande chance de ser melhor baseando-se em algum conhecimento acerca do problema. Caso simplex:
     i. Determinação da variável que entra na base
     ii. Determinação da variável que sai da base

- Entra na base (passa a fazer parte da solução):
  a) Variável com maior coeficiente na função objetivo
  b) ?

- Sai da base (deixa de fazer parte da solução):
  c) Variável que impõe maior restrição ao crescimento da variável escolhida para entrar na base

$$x_3 = 100 - 10x_1 - 10x_2$$

$$x_4 = 42 - 3x_1 - 7x_2$$

$$z = 60x_1 + 40x_2$$

Solução Atual

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 100,$

$x_4 = 42, z = 0$

- Se x_1 aumenta de valor, então z aumenta e x_3 e x_4 diminuem
- Porém, x_3 e x_4 **devem continuar** ≥ 0, portanto devemos encontrar qual destas variáveis impõe a maior restrição ao aumento de x_1

Solução Analítica

- Restrições impostas ao crescimento de x_1, considerando x_2 igual a zero são:

$$x_3 = 100 - 10x_1 \geq 0 \Rightarrow 10x_1 \leq 100 \Rightarrow x_1 \leq 10$$ **mais rigorosa**

$$x_4 = 42 - 3x_1 \geq 0 \Rightarrow 3x_1 \leq 42 \Rightarrow x_1 \leq 14$$

É desejável que a variável que entre na base cresça o máximo possível. Para tanto, a variável que sai terá que decrescer o máximo possível, isto é, se tornar zero.

- Podemos portanto expressar x_1(variável que entra na base) como função de x_3 (variável que sai da base)

Dicionário Inicial $$x_3 = 100 - 10x_1 - 10x_2$$

$$\Updownarrow$$

Novo Dicionário $$x_1 = 10 - 1x_2 - 0{,}1x_3$$

$$x_3 = 100 - 10x_1 - 10x_2$$
$$x_4 = 42 - 3x_1 - 7x_2$$
$$z = 60x_1 + 40x_2$$

- Solução Inicial (0;0;100;42); Z = 0

$$x_1 = 10 - 1x_2 - 0{,}1x_3$$
$$x_4 = 12 - 4x_2 + 0{,}3x_3$$
$$z = 600 - 20x_2 - 6x_3$$

- Solução após 1ª Iteração (10;0;0;12); Z = 600

- **Exemplo**

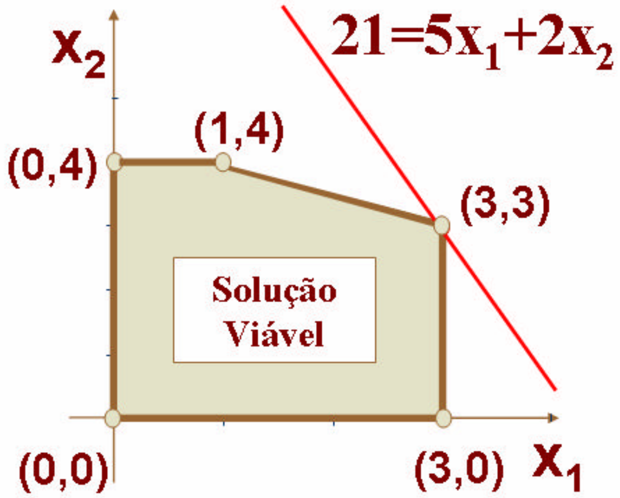
$$Max\ Z = 5x_1 + 2x_2$$

$$s.r.\quad x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



- Dicionário Inicial

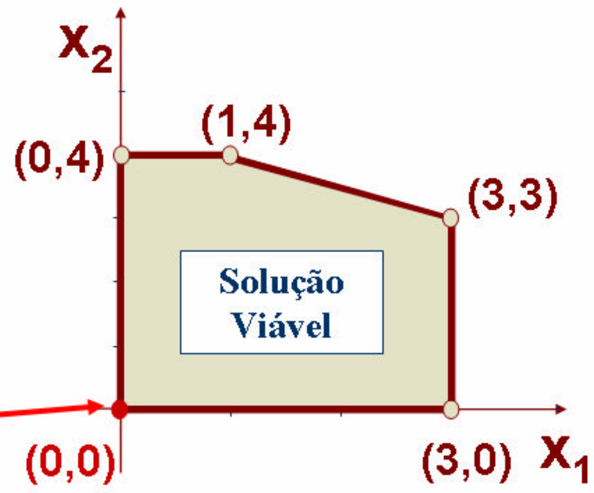
$$x_3 = 3 - x_1$$

$$x_4 = 4 - x_2$$

$$x_5 = 9 - x_1 - 2x_2$$

$$z = 5x_1 + 2x_2$$

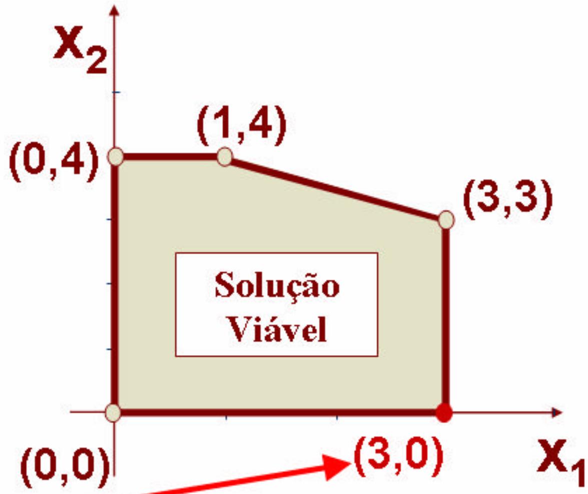
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$



Solução Inicial (0,0,3,4,9) e Z=0

- Dicionário após a 1ª Iteração

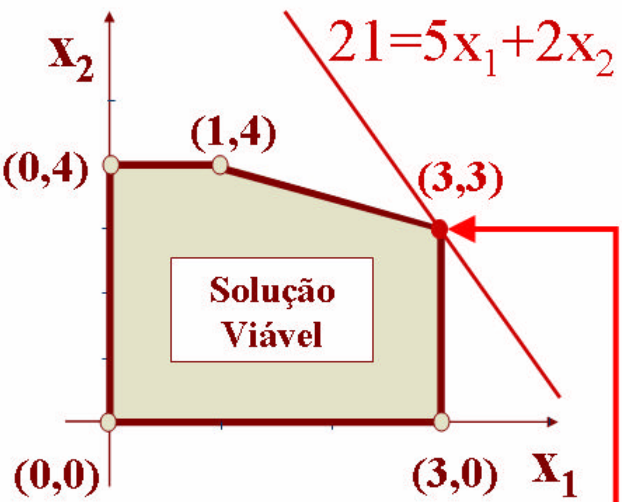
$$x_1 = 3 - x_3$$
$$x_4 = 4 - x_2$$
$$x_5 = 6 - 2x_2 + x_3$$
$$z = 15 + 2x_2 - 5x_3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$



- Solução Atual (3, 0, 0, 4, 6) e Z = 15

- Dicionário após a 2ª Iteração

$$x_1 = 3 - x_3$$
$$x_2 = 3 + \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_5$$
$$x_4 = 1 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_5$$
$$z = 21 - 4x_3 - x_5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$



- Solução 2ª Iteração
(3, 3, 0, 1, 0) e Z = 21 (ótima)

Problemas de Forma Não-Padrão

- São 4 características de um problema na forma padrão

$$\boxed{\text{Maximizar}} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\text{Sujeito a :}$$

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \;\boxed{\le}\; \boxed{b_1} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \;\le\; b_2 \quad \rightarrow \text{positivos} \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \;\le\; b_m \\
\boxed{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ge 0}
\end{array}$$

- Problemas de programação linear podem apresentar outras formas, tais como, igualdades e formas maior ou igual e/ou constantes não positivas nas restrições, ou ainda problemas de minimização.
- Estas formas de modelo apresentam problemas de se encontrar a solução básica inicial.
  - Por não existir esta solução básica inicial
  - Por não ser óbvia a solução inicial

Problemas de Inicialização

- Minimização pode ser transformada em uma maximização: min Z = max - Z
- No caso de alguma restrição, ser representada por uma igualdade, ou por uma inequação do tipo maior ou igual, ao invés de uma restrição de menor ou igual, quatro soluções possíveis podem ocorrer:
  1. Substituição da restrição de igualdade por duas desigualdades.
  2. Processo do “M Grande”
  3. Método da Função Objetivo Artificial
  4. Método das Duas Fases