Análise de Sensibilidade

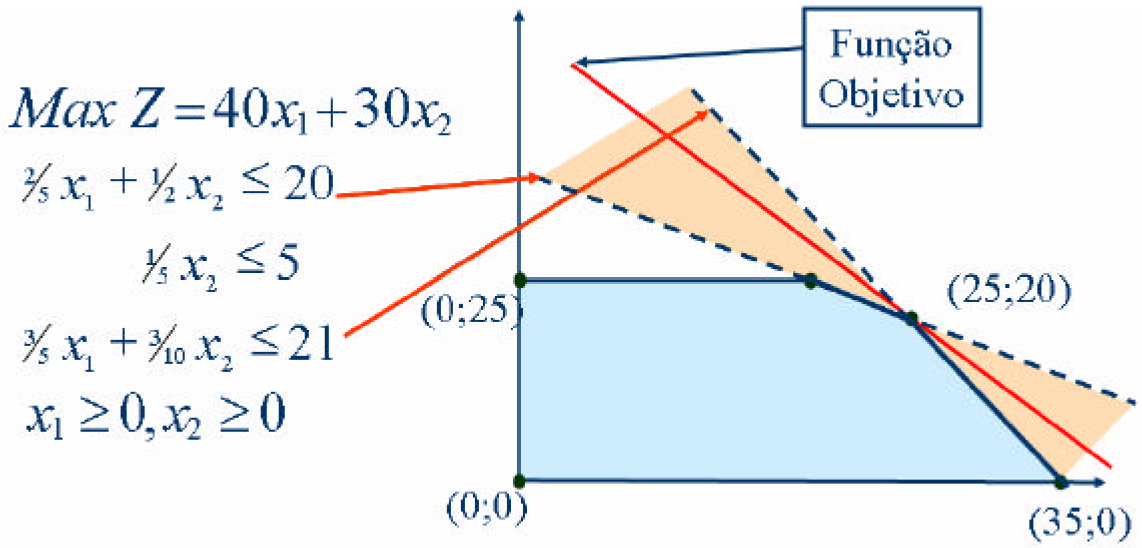
- Solução Degenerada
- Solução Gráfica
- Análise dos Coeficientes da Função Objetivo
- A Análise do Lindo
- A análise do Excel

- O Limite dos coeficientes das Restrições
  - Lindo
  - Excel
- Analisando todas as respostas do Excel
  - *Answer Report*
  - Análise Econômica
  - *Sensitivity Report*
  - *Limits Report*
  - Solução Degenerada
- Interpretação Econômica do Problema Dual
  - Preço-Sombra – *Shadow Price*
  - Custo Reduzido – *Reduced Cost*
- Caso Motorela Celulares
- Caso Agropecuária Coelho
- Intervalos de validação
  - *Shadow Price* ou *Dual Price*
  - *Reduced Cost*

Introdução

- Coeficientes são considerados constantes
- No mundo real quase nunca se tem certeza desses valores;
- Necessidade de análise pós-otimização:
  - Possíveis variações nos coeficientes sem que isto altere a solução ótima;
  - Caso haja alterações significativas o que fazer para encontrar o novo ótimo sem resolver novamente todo o problema;
- Análise de Sensibilidade:
  - Qual o efeito de uma mudança num coeficiente da função-objetivo?
  - Qual o efeito de uma mudança numa constante de uma restrição?
  - Qual o efeito de uma mudança num coeficiente de uma restrição?
  - Serve também para amenizar a hipótese de certeza nos coeficientes e constantes.
- Tipos básicos de análise de sensibilidade:
  - Estabelece limites inferiores e superiores para todos os coeficientes da função-objetivo e constantes das restrições:
    - Lindo/Excel;
    - Hipótese de uma alteração a cada momento;
  - Verifica se uma ou mais mudanças em um problema alteram a sua solução ótima
    - Pode ser feito através da alteração do problema e sua nova resolução.

Coeficientes da Função Objetivo



- As três retas pertencem a uma mesma família de retas, pois têm o ponto (25;20) em comum.
- Uma diferença entre elas é no coeficiente angular.
- A mudança de um coeficiente da função-objetivo causará uma alteração no coeficiente angular da função-objetivo
- Portanto, enquanto o coeficiente angular da função-objetivo estiver entre os das retas limites a solução ótima não se alterará.

- Declividade da reta B

$$\frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{10}x_2 = 21$$
$$\frac{3}{10}x_2 = 21 - \frac{3}{5}x_1$$
$$x_2 = \frac{10}{3}\left(21 - \frac{3}{5}x_1\right)$$
$$x_2 = 70 \boxed{-2}x_1$$

- Declividade da reta A

$$\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 20$$
$$\frac{1}{2}x_2 = 20 - \frac{2}{5}x_1$$
$$x_2 = 40 - \frac{4}{5}x_1$$
$$x_2 = 40 \boxed{-0{,}8}x_1$$

Coeficientes da Função Objetivo

- A forma geral da função objetivo é dada por:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

- Que na **Forma declividade-Interseção** é dada por

$$x_2 = -\frac{c_1}{c_2} x_1 + \frac{z}{c_2}$$

- Uma variação por vez:

$$-2 \le -\frac{c_1}{c_2} \le -0.8 \quad \text{para } c_2 = 30 \text{ temos}$$

$$-2 \le -\frac{c_1}{30} \le -0.8 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{c_1}{30} \ge -2 \quad \Leftrightarrow c_1 \le 60 \\ -\frac{c_1}{30} \le -0.8 \Leftrightarrow c_1 \ge 24 \end{cases}$$

$$\boxed{24 \le c_1 \le 60}$$

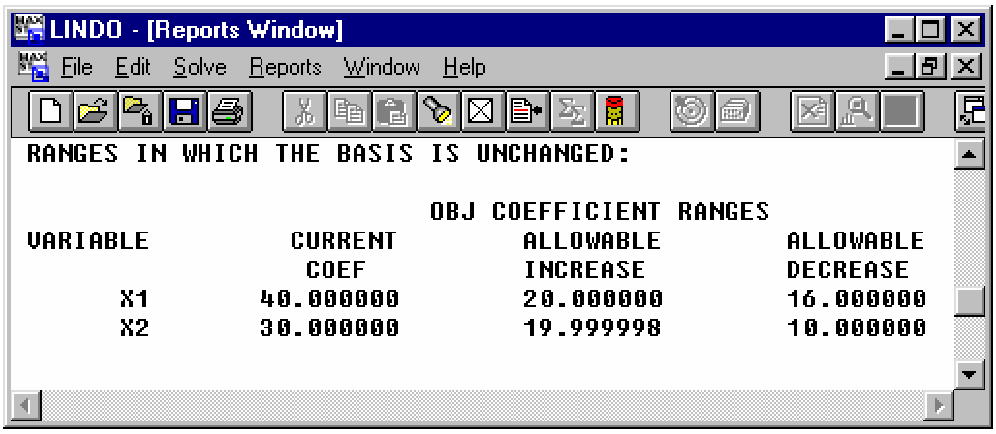
$$-2 \le -\frac{c_1}{c_2} \le -0.8 \quad \text{para } c_1 = 40 \text{ temos}$$

$$-2 \le -\frac{40}{c_2} \le -0.8 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{40}{c_2} \ge -2 \quad \Leftrightarrow c_2 \ge 20 \\ -\frac{40}{c_2} \le -0.8 \Leftrightarrow c_2 \le 50 \end{cases}$$

$$\boxed{20 \le c_2 \le 50}$$

Coeficientes da Função Objetivo

- Pode ser feita analiticamente
- Softwares, como o LINDO e EXCELL, costumam fazer este tipo de análise:



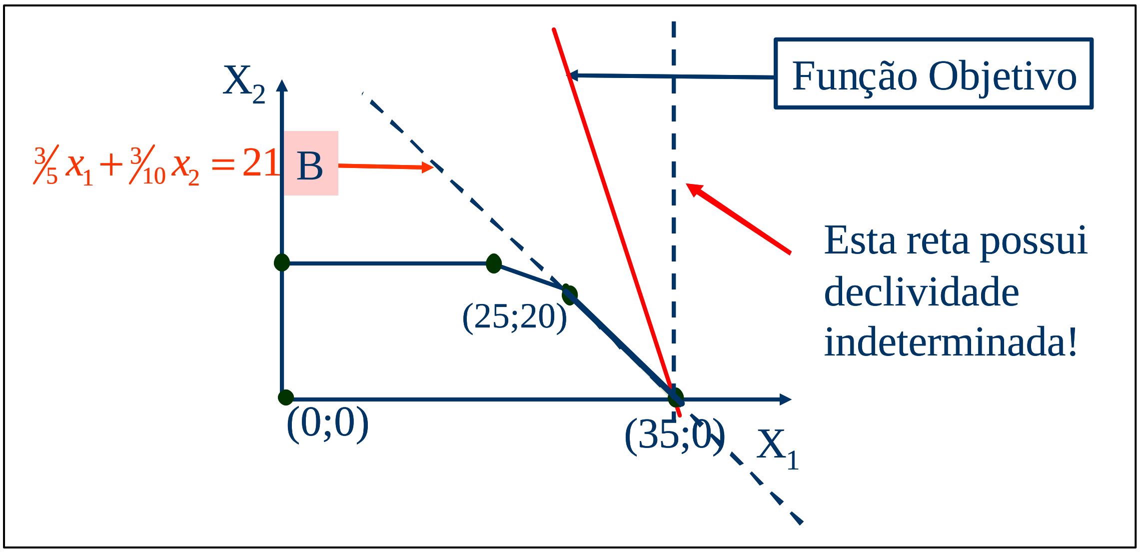
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	40.000000	20.000000	16.000000
X2	30.000000	19.999998	10.000000

Caso Especial

- Um caso especial de limite de crescimento acontece quando a rotação da função objetivo em torno do extremo ótimo passa pela reta vertical;
- Isso significa que não existirá ou o limite superior ou inferior para a declividade;



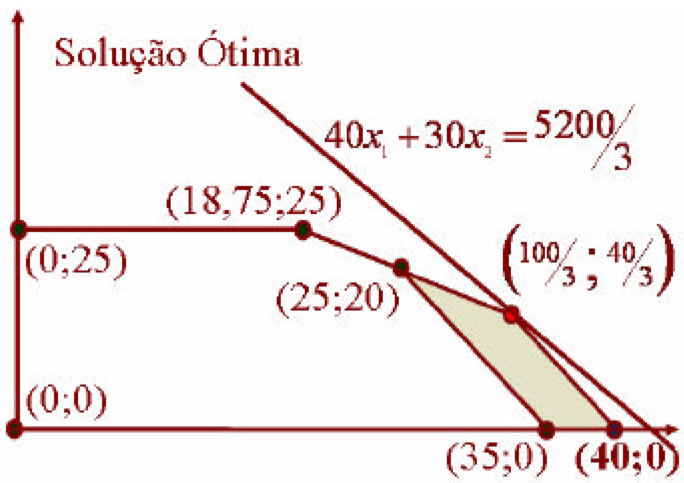
Constantes das Restrições

Preço-Sombra

- O preço-sombra contabiliza o que o Lucro Total (**Z**) seria melhorado, caso a quantidade do recurso *i* (b_i) pudesse e fosse aumentada uma quantidade igual à unidade.
- Indica o que está sendo pago por não ter mais unidades do recurso (maximização do lucro). Ou ainda, diz o preço justo a ser pago para ter uma unidade extra do produto (minimização de custos).

$$
\begin{aligned}
&\text{Max}Z = 40x_1 + 30x_2\\
&\text{s.r.}\\
&\tfrac{2}{5}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \le 20\\
&\qquad\quad \tfrac{1}{5}x_2 \le 5\\
&\tfrac{3}{5}x_1 + \tfrac{3}{10}x_2 \le \boxed{21}\\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{aligned}
&\text{Max}Z = 40x_1 + 30x_2\\
&\text{s.r.}\\
&\tfrac{2}{5}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \le 20\\
&\qquad\quad \tfrac{1}{5}x_2 \le 5\\
&\tfrac{3}{5}x_1 + \tfrac{3}{10}x_2 \le \boxed{24}\\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{Max}Z = 40x_1 + 30x_2\\
&\text{s.r.}\\
&\tfrac{2}{5}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \le 20\\
&\qquad\quad \tfrac{1}{5}x_2 \le 5\\
&\tfrac{3}{5}x_1 + \tfrac{3}{10}x_2 \le \boxed{24}\\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



Limites das Constantes das Restrições

- Na primeira situação tínhamos $Z = 1600$
- Dado o acréscimo de 3 unidades na segunda restrição obtivemos:

$$Z = \frac{5200}{3}$$

- Portanto:
  - Alteração da Função Objetivo: $\frac{5200}{3} - 1600 = \frac{400}{3}$
  - Logo, preço de sombra : $\frac{400}{3} = 44{,}44$

$$\text{Max}Z = 40x_1 + 30x_2$$

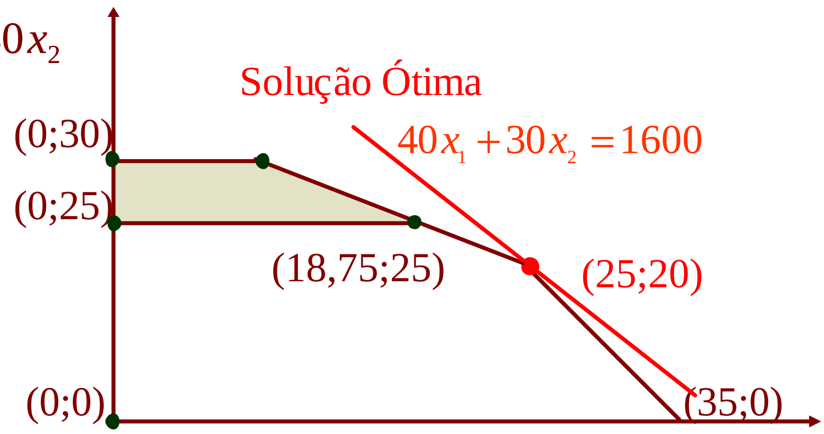
s.r.

$$\tfrac{2}{5}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \leq 20$$

$$\tfrac{1}{5}x_2 \leq 6$$

$$\tfrac{3}{5}x_1 + \tfrac{3}{10}x_2 \leq 21$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



- O conjunto de soluções viáveis se alterou
- Essa restrição não limita à solução ótima, que não se alterou
- Qual é o preço de sombra desta restrição? **ZERO**

Interpretação Econômica do Dual

- Os Preços-Sombra equivalem à solução ótima do Dual, onde as constantes das restrições são os coeficientes da função-objetivo;

PRIMAL	DUAL
$Max\ Z = 5x_1 + 2x_2$	$Min\ \ 3y_1 + 4y_2 + 9y_3$
sujeito a	st
$x_1 \leq 3$	$y_1 + y_3 \geq 5$
$x_2 \leq 4$	$y_2 + 2y_3 \geq 2$
$x_1 + 2x_2 \leq 9$	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
x_1 e $x_2 \geq 0$	

- Cada variável y_i do Dual está diretamente relacionada com a restrição *i* do problema Primal;
- O valor ótimo desta variável, y_i^*, é justamente o Preço-Sombra (*Shadow Price* ou *Dual Price*) do recurso *i*;
- Portanto, cada restrição *i* possui um preço-sombra y_i^*
- O preço-sombra para o recurso *i* (y_i^*) mede o valor marginal (*incremental*) deste recurso em relação ao lucro total.

Coeficientes das Restrições

Custo Reduzido

- Cada variável do problema original possui um determinado custo reduzido que significa:
    1. O total que o seu coeficiente na função-objetivo deve melhorar para que ela deixe de ser zero na solução ótima (ou seja, se tornar básica);
    2. Quanto a função-objetivo irá piorar para cada unidade que ela aumente a partir de zero;
- Cada variável de folga/excesso do Dual está diretamente relacionada a uma determinada variável original do problema Primal;
- Se uma variável do problema original for maior que zero, o valor da variável do Dual relacionada será zero, i.e., o custo reduzido será zero;
- **O custo reduzido só se aplica às variáveis que, na solução ótima, são zero.**

Exemplo da Fábrica de Celulares

Para produzir 3 tipos de telefones celulares, a fábrica da Motorela utiliza três processos diferentes, o de montagem, a configuração e a verificação. Para fabricar o celular Multi-Tics, são necessárias 0,1 h de montagem, 0,2 h de configuração e 0,1 h de verificação. O mais popular Star Tic Tac requer 0,3 h de montagem, 0,1 h de configuração e 0,1 h de verificação. Já o moderno Vulcano necessita de 0,4 h de montagem, 0,3 h para configuração, porém, em virtude de seu circuito de última geração, não necessita de verificação. A fábrica dispõe de capacidade de 290 hs/mês na linha de montagem, 250 hs/mês na linha de configuração e 110 hs/mês na linha de verificação. Os lucros unitários dos produtos Multi-Tics, Star Tic-Tac e Vulcano são R$ 100, R$ 210 e R$ 250, respectivamente e a Motorela consegue vender tudo o que produz. Sabe-se ainda que o presidente da Motorela exige que cada um dos três modelos tenha produção mínima de 100 unidades e quer lucrar pelo menos R$ 25.200/mês com o modelo Star Tic-Tac. O presidente também exige que a produção do modelo Vulcano seja pelo menos o dobro do modelo Star Tic-Tac.

- x_1- Número de celulares Multi-Tics produzidos mensalmente.
- x_2- Número de celulares Star Tic-Tacs produzidos 7 mensalmente.
- x_3- Número de celulares Vulcanos produzidos mensalmente.

$$\boxed{Max\, 100x_1 + 210x_2 + 250x_3}$$

Exemplo da Fábrica de Celulares

- Produção
  - Linha de Montagem $0,1x_1 + 0,3x_2 + 0,4x_3 \leq 290$
  - Linha de Configuração $0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,3x_3 \leq 250$
  - Linha de Verificação $0,1x_1 + 0,1x_2 \leq 110$
- Produção Mínima $x_1 \geq 100\,;\, x_2 \geq 100\,;\, x_3 \geq 100$
- Lucro Mínimo Star Tic-Tac $210x_2 \geq 25200$
- Produção Vulcano $x_3 \geq 2x_2$
- Não Negatividade $x_1; x_2; x_3 \geq 0$

Exemplo da Fábrica de Celulares

E6 =SUMPRODUCT(B6:D6;$B$3:$D$3)

	A	B	C	D	E	F	G
1		X1	X2	X3			
2	Coef. F.Objetiva	100	210	250			
3	Variáveis						
4	Z=	0					
5	Restrições				LHS	RHS	Tipo
6	Montagem	0,1	0,3	0,4	0	290	<=
7	Configuração	0,2	0,1	0,3	0	250	<=
8	Verificação	0,1	0,1	0	0	110	<=
9	Prod_min_x1	1	0	0	0	100	>=
10	Prod_min_x2	0	1	0	0	100	>=
11	Prod_min_x3	0	0	1	0	100	>=
12	Lucro_min_x2	0	210	0	0	25200	>=
13	Prod_x3	0	-2	1	0	0	>=
14							

	A	B	C	D	E	F	G
1		X1	X2	X3			
2	Coef. F.Objetiva	100	210	250			
3	Variáveis	480	220	440			
4	Z=	204200					
5	Restrições				LHS	RHS	Tipo
6	Montagem	0,1	0,3	0,4	290	290	<=
7	Configuração	0,2	0,1	0,3	250	250	<=
8	Verificação	0,1	0,1	0	70	110	<=
9	Prod_min_x1	1	0	0	480	100	>=
10	Prod_min_x2	0	1	0	220	100	>=
11	Prod_min_x3	0	0	1	440	100	>=
12	Lucro_min_x2	0	210	0	46200	25200	>=
13	Prod_x3	0	-2	1	0	0	>=

Answer Report 1 / Sensitivity Report 1 / Limits Report 1 / **Primal**

Exemplo da Fábrica de Celulares

- Que restrições limitam a solução ótima?

A1 Microsoft Excel 10.0 Answer Report

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$E$6	Montagem LHS	290	$E$6<=$F$6	Binding	0
$E$7	Configuração LHS	250	$E$7<=$F$7	Binding	0
$E$8	Verificação LHS	70	$E$8<=$F$8	Not Binding	40
$E$9	Prod_min_x1 LHS	480	$E$9>=$F$9	Not Binding	380
$E$10	Prod_min_x2 LHS	220	$E$10>=$F$10	Not Binding	120
$E$11	Prod_min_x3 LHS	440	$E$11>=$F$11	Not Binding	340
$E$12	Lucro_min_x2 LHS	46200	$E$12>=$F$12	Not Binding	21000
$E$13	Prod_x3 LHS	0	$E$13>=$F$13	Binding	0

Answer Report 1 / Sensitivity Report 1 / Limits Report 1 / Primal

- Quanto deve ser melhorado no lucro unitário para que se produza o modelo Star Tic-Tac?

A1 Microsoft Excel 10.0 Sensitivity Report

Microsoft Excel 10.0 Sensitivity Report
Worksheet: [aula13e-exercicio1.xls]Primal
Report Created: 12/10/2002 17:39:14

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$3	Variáveis X1	480	0	100	102,8571429	35,45454545
$C$3	Variáveis X2	220	$\boxed{0}$	210	390	60
$D$3	Variáveis X3	440	0	250	60	180

Exemplo da Fábrica de Celulares

- Até quanto você pagaria por uma hora de verificação terceirizada?

13 Constraints

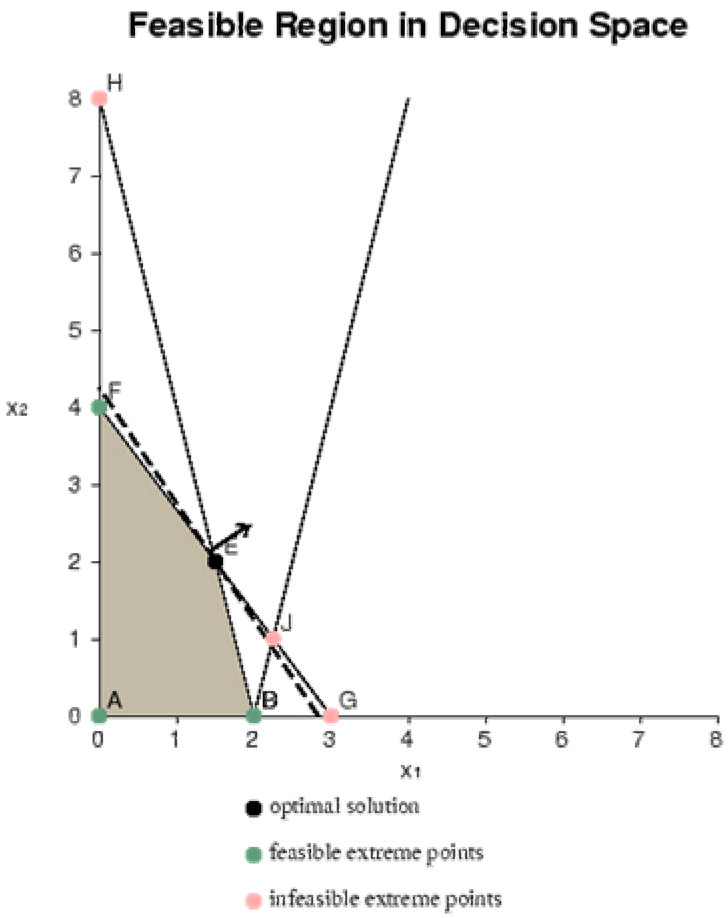
Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$E$6	Montagem LHS	290	480	290	81,42857143	75
$E$7	Configuração LHS	250	260	250	60	51,81818182
$E$8	Verificação LHS	70	0	110	1E+30	40
$E$9	Prod_min_x1 LHS	480	0	100	380	1E+30
$E$10	Prod_min_x2 LHS	220	0	100	120	1E+30
$E$11	Prod_min_x3 LHS	440	0	100	340	1E+30
$E$12	Lucro_min_x2 LHS	46200	0	25200	21000	1E+30
$E$13	Prod_x3 LHS	0	-20	0	300	600

- Até quanto você pagaria por uma hora de montagem terceirizada?

13 Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$E$6	Montagem LHS	290	480	290	81,42857143	75
$E$7	Configuração LHS	250	260	250	60	51,81818182
$E$8	Verificação LHS	70	0	110	1E+30	40
$E$9	Prod_min_x1 LHS	480	0	100	380	1E+30
$E$10	Prod_min_x2 LHS	220	0	100	120	1E+30
$E$11	Prod_min_x3 LHS	440	0	100	340	1E+30
$E$12	Lucro_min_x2 LHS	46200	0	25200	21000	1E+30
$E$13	Prod_x3 LHS	0	-20	0	300	600

Solução Degenerada



- Quando se define qual a variável básica que sai e o mínimo é atingido em mais do que um dos quocientes (empate no critério de saída) obtém-se uma solução básica degenerada, i.e., com variáveis básicas nulas.
- O Algoritmo Simplex nestes casos pode entrar em "loop" i.e., pode começar a reproduzir periodicamente as mesmas soluções básicas, mantendo-se constante o valor da f.o. e nunca atingir o valor ótimo.