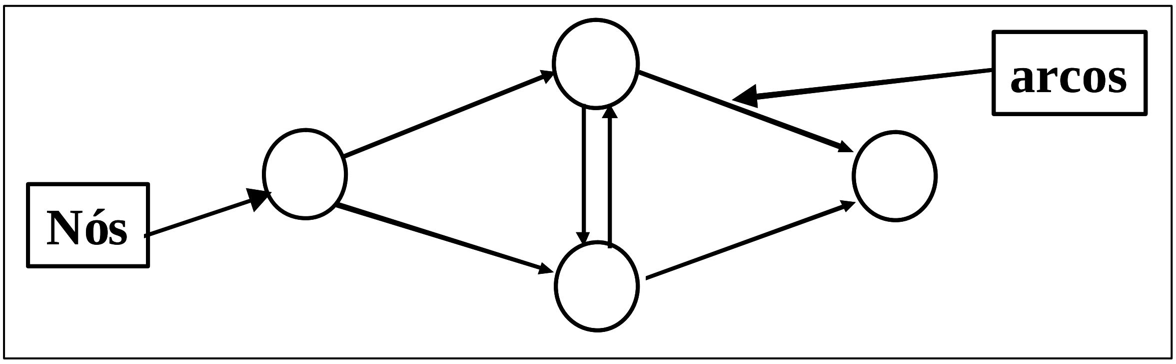
Problemas de Rede
Conteúdos do Capítulo

- Modelos em Rede
  - Regra do Fluxo Balanceado
  - Caso LCL Bicicletas
  - Problemas de Rede de Distribuição;
    - Caso Frod
  - Problemas do Menor Caminho;
  - Problemas de Fluxo Máximo;

Modelos em Rede

- Modelos de rede podem ser utilizados em diversas áreas tais como transportes, energia e comunicações para modelagem de diversos tipos de problemas.
- Uma rede é um conjunto de vértices ou nós ligados entre si por um conjunto de arcos.



- Um grande número de problemas de tomada de decisão no mundo real estão categorizados como Problemas de Fluxo de Rede:
  - Problemas de Transporte/Designação.
  - Rede de Distribuição;
  - Problemas do Menor Caminho;
  - Problemas de Fluxo Máximo;

Problema de Transporte

Caso LCL Bicicletas

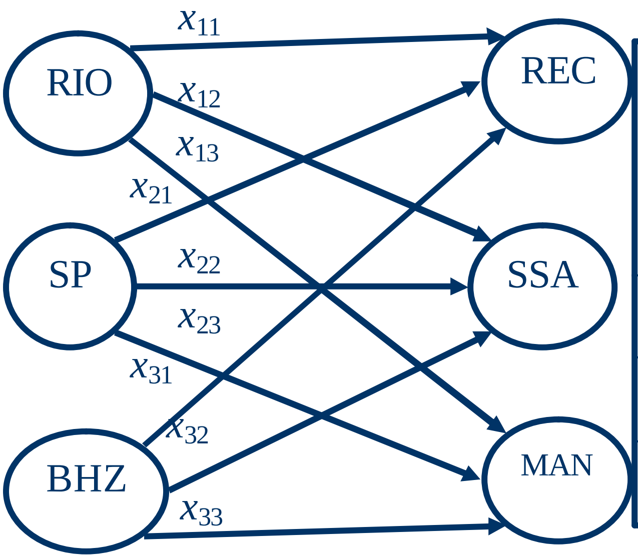
- A LCL Bicicletas possui 3 fábricas localizadas no Rio, São Paulo e Belo Horizonte. A produção deve ser entregue em Recife, Salvador e Manaus. Considerando os custos de transporte unitários, as capacidades de produção e as demandas dos centros consumidores que estão especificados na tabela a seguir, determine quanto deve ser produzido e entregue por cada fábrica em cada centro consumidor de forma a minimizar os custos de transporte.

	Centro Consumidor			
Fábrica	Recife	Salvador	Manaus	**Capacidade**
Rio	25	20	30	2000
São Paulo	30	25	25	1500
B.Horizonte	20	15	23	1500
Demanda	**2000**	**2000**	**1000**	

- Haverá 9 variáveis para expressar a quantidade transportada em cada uma das possíveis vias. Ou seja: Xij = Quantidade transportada da fábrica i para o centro consumidor j.

$$i = \begin{cases} 1 - \text{Rio} \\ 2 - \text{São Paulo} \\ 3 - \text{Belo Horizonte} \end{cases} \qquad j = \begin{cases} 1 - \text{Recife} \\ 2 - \text{Salvador} \\ 3 - \text{Manaus} \end{cases}$$

- **Oferta diferente da Demanda**



Fábrica	Centro Consumidor		
	REC	SSA	MAN
Rio	x_{11}	x_{12}	x_{13}
SP	x_{21}	x_{22}	x_{23}
BH	x_{31}	x_{32}	x_{33}

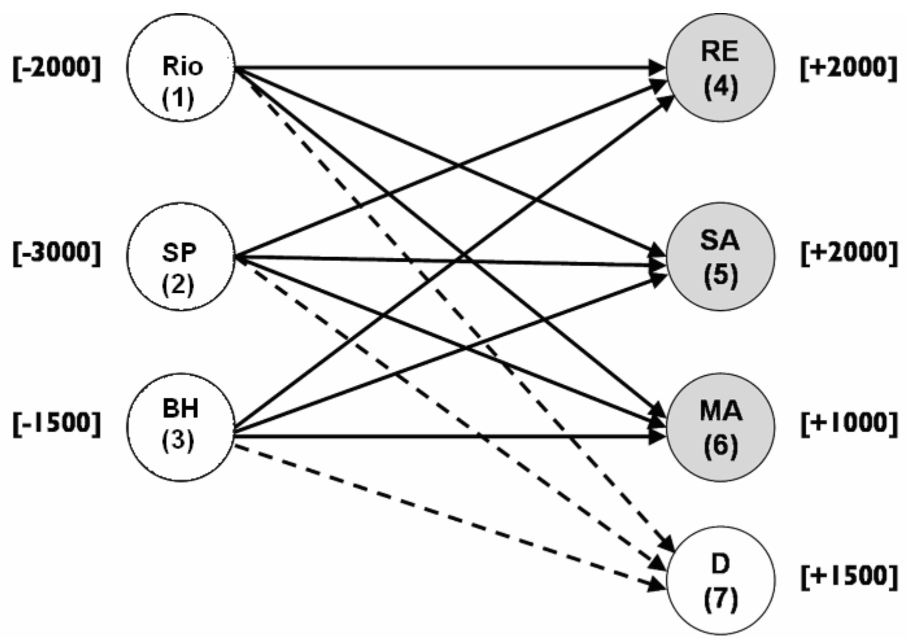
- **Soluções Inteiras e Viáveis:**
  - Para problemas de transporte onde os valores das ofertas, $\boldsymbol{o_i}$ e demandas $\boldsymbol{d_j}$, sejam números **inteiros**, todos os valores das variáveis das soluções básicas viáveis, incluindo a solução ótima, também serão inteiros
  - A condição necessária e suficiente para um problema de transporte com n fábricas e m centros consumidores tenha solução é dada por: $\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{j=1}^{m} d_j$

- **Demanda diferente da Oferta**

Fábrica	Centro Consumidor			**Capacidade (oferta)**
	Recife	Salvador	Manaus	
Rio	25	20	30	**2000**
São Paulo	30	25	25	**3000**
B.Horizonte	20	15	23	**1500**
Demanda	**2000**	**2000**	**1000**	

- Cria-se um consumidor *Dummy*:

Fábrica	Centro Consumidor				Capacidade
	Recife	Salvador	Manaus	fantasma	
Rio	25	20	30	**0**	**2000**
São Paulo	30	25	25	**0**	**3000**
B.Horizonte	20	15	23	**0**	**1500**
Demanda	**2000**	**2000**	**1000**	**1500**	



Oferta Diferente da Demanda

- A regra das variáveis fantasmas (*Dummy*):
  - No caso de **Oferta** $\geq$ **Demanda** devemos introduzir um **destino fantasma**;
  - No caso de **Demanda** $\geq$ **Oferta** devemos introduzir uma **oferta fantasma**;
- Todos os custos relacionados às variáveis fantasmas serão nulos;
- A oferta ou a demanda fantasma será dada pela diferença entre o total ofertado e total demandado.
- As Variáveis *Dummy* não são obrigatórias, apenas facilitam a interpretação do resultado da otimização.

Aplicações de Problema de Transporte

- O problema de transporte não é aplicado apenas a problemas de distribuição de mercadorias das fábricas para centros distribuidores;
- O mesmo tipo de formulação pode ser aplicado a outros tipos de problema, tais como:
  - Problemas de **Escalas de Produção**;
  - Problemas de *Lay-out* de fábricas;

Problemas de Escalas de Produção;

A LCL Fórmula 1 Ltda. fornece motores para um grande nº de equipes de fórmula 1. A companhia detém uma série de contratos de entregas futuras programadas para o próximo ano. As entregas deverão ocorrer trimestralmente de acordo com as necessidades das equipes. A tabela resume as entregas programadas, a capacidade máxima de produção, o custo de produção por trimestre e o custo de armazenamento. Formule o problema para achar o número de motores que devem ser fabricados em cada trimestre de maneira a atender os pedidos contratados.

Trim	Pedidos Contratados	Capacidade Produção	Custo Unitário*	Custo Arm. por Trim.*
1	10	25	1,08	
2	15	35	1,11	0,015
3	25	30	1,10	0,015
4	20	10	1,13	0,015

* em milhões de reais

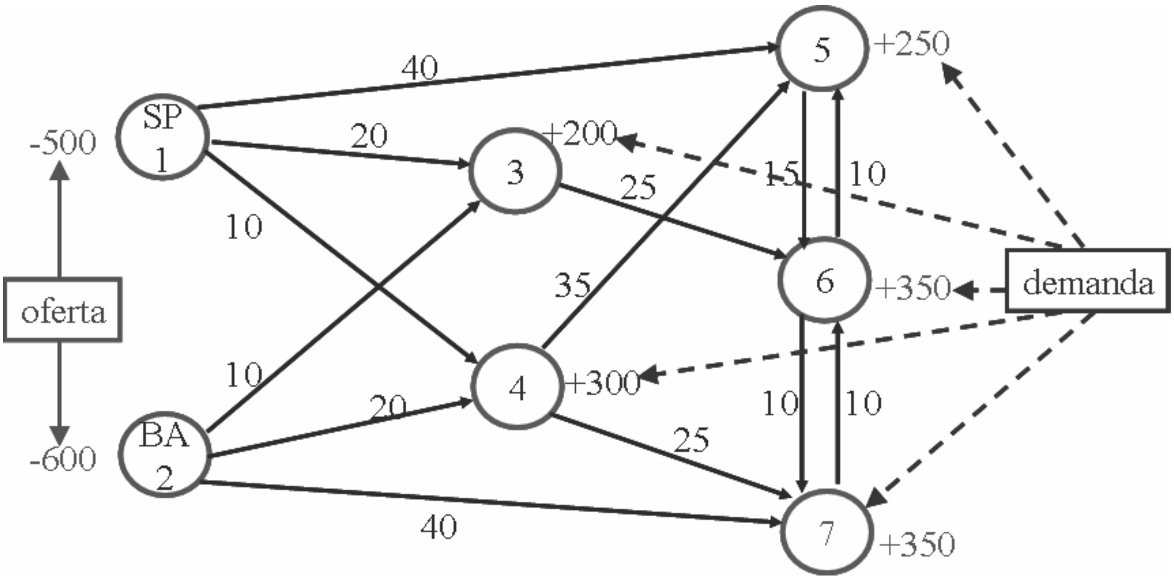
- Fonte i = produção de motores no trimestre i (i=1,..,4)
- Destino j = entrega dos motores às equipes no trimestre j
- X_{ij} = nº de motores produzidos em i para entrega j
- C_{ij} = custo associado ao motor X_i
- D_j = nº de pedidos contratados
- F_i = capacidade de produção no mês i

Destino							
		1	2	3	4	5(D)	Oferta
Fontes	1	1,080	1,095	1,110	1,125	0	25
	2		1,110	1,125	1,140	0	35
	3			1,10	1,115	0	30
	4				1,130	0	10
Demanda		10	15	25	20	30	

Problemas de Rede de Distribuição

Caso Frod Brasil

A Frod Brasil terá duas fábricas no Brasil, uma na Bahia e outra em São Paulo, e está estudando a forma de distribuição de seus carros para as diversas revendas de Minas Gerais. Quais as rotas que devem ser seguidas a partir das fábricas para atender as diversas revendas.



- Variáveis de Decisão
  - X_{ij} – nº de carros remetidos de i para j
- Função-objetivo
  - Minimizar o custo de distribuição

$$
\begin{aligned}
Min\ & 10X_{14} + 20X_{13} + 40X_{15} + 10X_{23} + 20X_{24} + 40X_{27} \\
& + 25X_{36} + 35X_{45} + 25X_{47} + 15X_{56} + 10X_{67} + 10X_{65} \\
& + 10X_{76}
\end{aligned}
$$

Regra de Fluxo Balanceado

- Para cada nó:
  - No Caso de Oferta Total = Demanda Total

$$\begin{bmatrix}\text{total de entradas}\\ \text{no nó}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{total de saídas}\\ \text{no nó}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Oferta/Demanda}\\ \text{do nó}\end{bmatrix}$$

  - Caso a Oferta Total > Demanda Total

$$\begin{bmatrix}\text{total de entradas}\\ \text{no nó}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{total de saídas}\\ \text{no nó}\end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix}\text{Oferta/Demanda}\\ \text{do nó}\end{bmatrix}$$

  - Caso a Oferta Total < Demanda Total

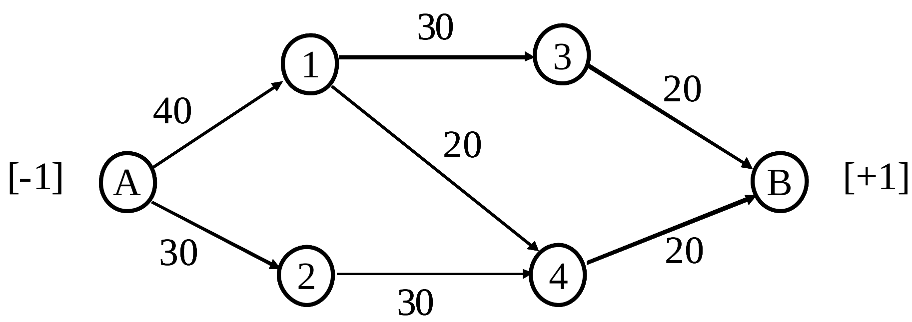
$$\begin{bmatrix}\text{total de entradas}\\ \text{no nó}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{total de saídas}\\ \text{no nó}\end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix}\text{Oferta/Demanda}\\ \text{do nó}\end{bmatrix}$$

- Como a **oferta total (1.100)** é menor que a **demanda total (1.400)** devemos utilizar a seguinte restrição em todos os nós:
  - Entradas – Saídas ≤ Oferta / Demanda do nó

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				**Frod Brasil**			Fluxo	Oferta /
2		De	Para	Custo	Unidades	Nó	Líquido	Demanda
3		1	3	20	0	1	-500	-500
4		1	4	10	500	2	-600	-600
5		1	5	40	0	3	200	200
6		2	3	10	550	4	300	300
7		2	4	20	0	5	0	250
8		2	7	40	50	6	350	350
9		3	6	25	350	7	250	350
10		4	5	35	0			
11		4	7	25	200			
12		5	6	15	0			
13		6	5	10	0			
14		6	7	10	0			
15		7	6	10	0			
16			Custo Total		26250			

Problemas de Menor Caminho

- Seja uma rede na qual o arco signifique a distância entre dois pontos (nós) e se queira achar a rota que una estes pontos com distância mínima
- Generalização do problema para distribuição de energia, renovação de frota de veículos, etc.
- Considere a rede abaixo que representa a ligação rodoviária entre duas cidades. O tamanho dos arcos representa a distância entre as Cidades (nós).



- Este problema pode ser visto como um problema de rede de distribuição com uma fonte(A)= -1 e um demanda (B)=+1 e os demais sem demanda ou fonte (=0)

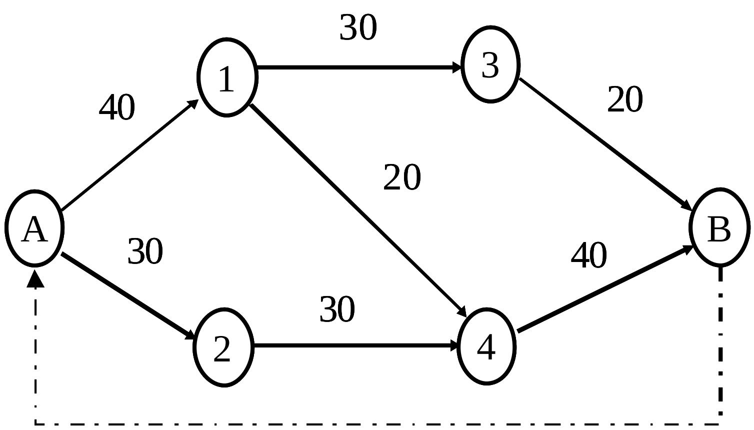
	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Menor Caminho				Fluxo	Oferta /
2		De	Para	Km	Unidades	Nó	Líquido	Demanda
3		A	1	40	1	A	-1	-1
4		A	2	30	0	1	0	0
5		1	3	30	0	2	0	0
6		1	4	20	1	3	0	0
7		2	4	30	0	4	0	0
8		3	B	20	0	B	1	1
9		4	B	20	1			
10								
11			Custo Total		80			

Problema do Fluxo Máximo

- Seja uma rede de nós e arcos
- Deseja-se que um maior fluxo de uma grandeza possa fluir de um determinado nó para outro.
- Nesse tipo de problema mais de um caminho pode ser utilizado simultaneamente
- Aplicações em rede de distribuição de água, luz, gás e tráfego na internet.

Solução

- Adicionar um arco artificial ligando o ponto de saída (A) ao ponto de chegada (B).
- Maximizar o fluxo no arco artificial criado.



- Utilizar a regra de balanceamento de redes.
- As grandezas associadas aos arcos são o fluxo máximo em cada trecho da rede, portanto restrições no modelo.
- O Valor de Oferta/Demanda em cada nó é igual a zero.

Exemplo de Problema do Fluxo Máximo

Variáveis de decisão

X_{A1}- m^3/s que saem de A e chegam em 1
X_{3B}- m^3/s que saem de 3 e chegam em B
X_{4B}- m^3/s que saem de 4 e chegam em B
X_{BA}- m^3/s que retornam pelo arco artificial

Função-objetivo

Max X_{BA}

Regras para as Restrições

- O fluxo de cada arco $0 \leq X_{ij} \leq Max_{ij}$, exceto o arco artificial que deve suportar a maximização;
- Fluxo que chega é o mesmo que sai;

Exemplo:

$X_{A1} \leq 40$

$X_{3B} \leq 20$

$X_{4B} \leq 40$

$X_{BA} \leq 9999$

$X_{BA} - (X_{A1} + X_{A2}) = 0$

...

$X_{3B} + X_{4B} - (X_{BA}) = 0$

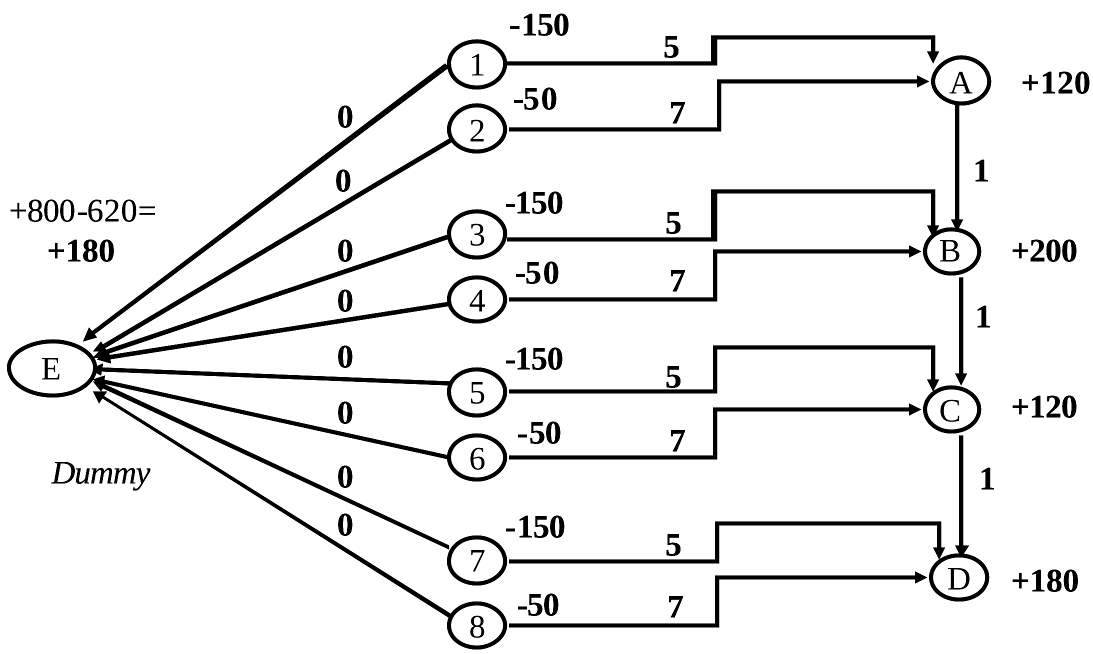
	A	B	C	D	E	F	G	H
1				Fluxo Máximo			Fluxo	Oferta /
2		De	Para	Fluxo Max	Unidades	Nó	Líquido	Demanda
3		A	1	40	40	A	0	0
4		A	2	30	20	1	0	0
5		1	3	30	20	2	0	0
6		1	4	20	20	3	0	0
7		2	4	30	20	4	0	0
8		3	B	20	20	B	0	0
9		4	B	40	40			
10		B	A	1000	60			
11								
12			Custo Total		60			

Caso LCL Eletrodomésticos Ltda.

A LCL Eletrodomésticos Ltda. deseja realizar o escalonamento de sua produção para os próximos 4 meses. Sua fábrica pode produzir mensalmente em horário normal 150 ferros de passar a um custo de R$5, e em horário extra, 50 unidades a um custo de R$ 7. Considere que é possível armazenar durante um mês a um custo unitário de R$1. Suponha que as demandas para os próximos quatro meses são de 120, 200,120 e 180.

Modelando a Rede

- Cada nó representará uma unidade produtora ou unidade receptora. São **8 unidades produtoras** (2 por mês), e **5 unidades receptoras** (4 meses mais o *Dummy* – visto que a capacidade produtiva é maior que a demanda);
- Cada arco está relacionado ao custo de produção ou armazenagem.

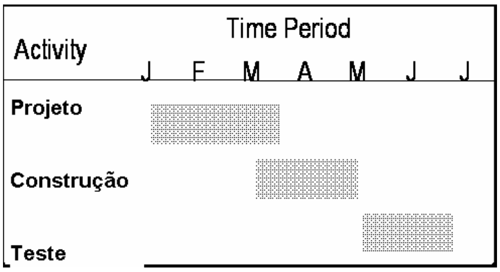


Problema do Designação
Ofertas e demandas unitárias

Problema do Transporte com Transbordo
Permite incluir pontos intermediários de estocagem

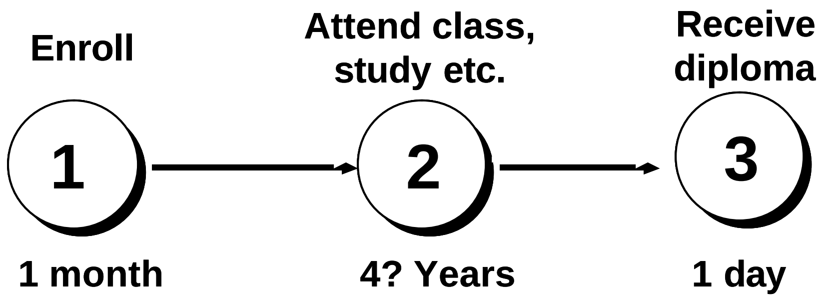
Problema do Caminho Crítico

- Número grande de tarefas que ocorrem paralelamente e cm duração de tempo variada, mas conhecida;
- Apresentem também pontos de concorrência e interdependência
- Aplicações
  - Construção civil
  - Gerência de projetos (desenvolvimento de software)
- Ferramentas:
  - Gantt Chart
  - CPM/PERT
  - Microsoft Project ™

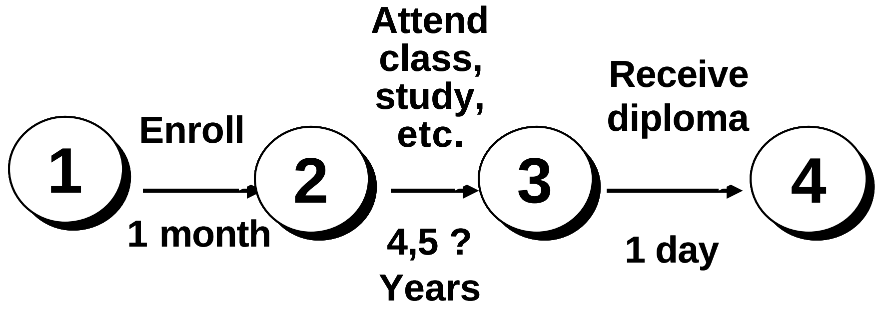


Problema do Caminho Crítico

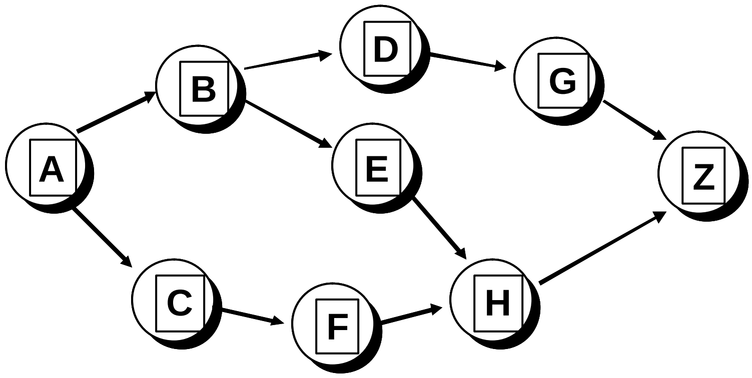
- **PERT**
  - Program Evaluation and Review Technique
  - U.S. Navy for Polaris missile project (1958)
  - Developed to handle uncertain activity times
- **CPM**
  - Critical Path Method
  - Du Pont & Remington Rand (1957)
  - Developed for industrial projects for which activity times generally were known
- **Questions:**
  - Completion date?
  - On schedule?
  - Within budget?
  - Probability of completing?
  - Critical activities?
  - Enough resources available?
  - How can the project be finished early at the least cost?
- Rede orientada por tarefas



- Rede orientada por eventos



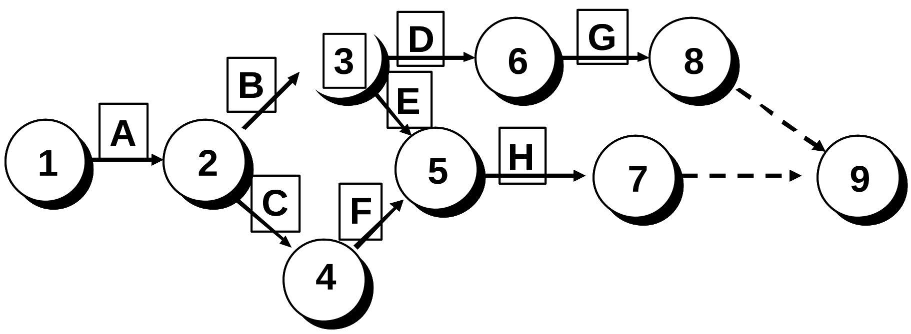
Problema de Fluxo em rede



Min $t_N - t_1$

Sujeito a: $t_i \geq t_j + d_{ij}$

- Rede PERT orientada a tarefas
- Não é um problema de fluxo de rede
- Cada restrição corresponde a uma variável x_{ij} que significam uma atividade com custo (duração) associado.



Max $\Sigma\, d_{ij}\, x_{ij}$

Sujeito a: $-x_{12} = -1$

$+x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0$

(...)

- O dual é orientado a eventos
- O problema do maior caminho equivale a achar o maior tempo necessário para cumprir todas as tarefas
- E o caminho crítico? Probabilidade de sucesso? etc

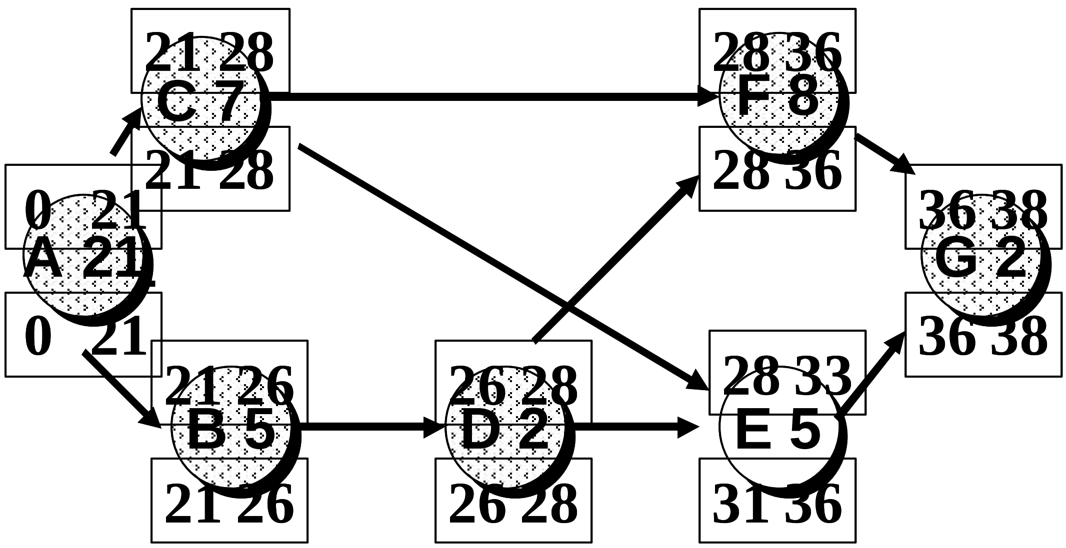
Análise de Caminho Crítico

- Informações para cada atividade
  - Início mais cedo (ES) e mais tarde (LS)
  - Final mais cedo (EF) e mais tarde (LF)
  - Folga (S): Atraso permitido
- Identifica o caminho crítico
  - O caminho mais longo na rede
  - O menor tempo em que pode ser completado
  - Qualquer atraso retarda o projeto
  - Atividades sem folga

Caminho Crítico

- Do início ao fim
  - ES = 0 para atividades iniciais
    Max { EF dos predecessores } CC
  - EF = ES + Tempo de atividade

- Do fim para o início
  - LF = Max{ EF } para atividades finais
    Min{ LS dos sucessores} CC
  - LS = LF – Tempo de atividade



Tempos de projeto

- Tempo esperado *(T):* Soma dos tempos das atividades do caminho crítico (CC):

$$t_i = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6}, \forall i \in CC$$

- Variâncias (*V*): Soma das variâncias das atividades do caminho crítico (CC):

$$s_i^{\,2} = \left(\frac{b_i - a_i}{6}\right)^2, \forall i \in CC$$

- Probabilidades ($P_N[Z]$):

$$Z = \frac{X - T}{\sqrt{V}}$$

- Exemplo

Activity	a	m	b	t	CP	b-a	(b-a)/6	((b-a)/6)
A	1	2	3	2,00	no	2	0,333	0,1
B	2	3	5	3,17	no	3	0,500	0,2
C	2	3	6	3,33	no	4	0,667	0,4
D	3	4	6	4,17	yes	3	0,500	0,2
E	2	5	7	4,83	yes	5	0,833	0,6
		Critical Path time		**9,00**		Sum of Variance		**0,9**
							s =	**0,9**

Can this project be completed in 11 days?

RT-CPT **2** **2/.972 =** 2,057983 **= Z**

PERT Time/Cost –

Table of Values of the Standard Normal Distribution Function*

Z	PR	Z	PR	Z	PR	Z	PR
-3	.0013	-1.5	.0668	.0	.5000	1.5	.9332
-2.9	.0019	-1.4	.0808	.1	.5398	1.6	.9452
-2.8	.0026	-1.3	.0968	.2	.5793	1.7	.9554
-2.7	.0035	-1.2	.1151	.3	.6179	1.8	.9641
-2.6	.0047	-1.1	.1357	.4	.6554	1.9	.9713
-2.5	.0062	-1.0	.1587	.5	.6915	2.0	.9772
-2.4	.0082	- .9	.1841	.6	.7257	2.1	.9821