ICCP

Sistemas de Numeração

Portela

A representação da informação

- **Para o computador, tudo são números.**

- **Computador Digital** $\Rightarrow$ Normalmente a informação a ser processada é de forma numérica ou texto $\Rightarrow$ codificada internamente através de um **código numérico**.

- Código mais comum $\Rightarrow$ **BINÁRIO**

Por que é utilizado o sistema binário?

A informação e sua representação

- O computador, por ser uma máquina eletrônica, só consegue processar duas informações: a **presença** ou **ausência** de energia.

- Como os computadores representam as informações utilizando apenas dois estados possíveis - eles são totalmente adequados para números binários.

- Uma quantidade computacional que pode tomar um de dois valores, tais como verdadeiro e falso ou 1 e 0, respectivamente (lógica positiva).

- Um bit está ligado (*set*) quando vale 1, desligado ou limpo (*reset* ou *clear*) quando vale 0; comutar, ou inverter (*toggle* ou *invert*) é passar de 0 para 1 ou de 1 para 0. (lógica positiva)

Sistema de Numeração

- Conjunto de símbolos utilizados para representação de quantidades e de regras que definem a forma de representação.
- Cada sistema de numeração é apenas um método diferente de representar quantidades. As quantidades em si não mudam; mudam apenas os símbolos usados para representá-las.
- A quantidade de algarismos disponíveis em um dado sistema de numeração é chamada de **base**.
- Representação numérica mais empregada: ***notação posicional***.

Notação Posicional

- Valor atribuído a um símbolo *dependente* da posição em que ele se encontra no conjunto de símbolos que representa uma quantidade.

- O valor total do número é a soma dos valores relativos de cada algarismo (decimal).

Sistema de numeração decimal

735

700 30 5

573

500 70 3

Notação Não Posicional

- **Valor atribuído a um símbolo é *inalterável*, independente da posição em que se encontre no conjunto de símbolos que representam uma quantidade.**

Sistema de Numeração *Romano*

XXI

10 10 1

XIX

10 1 10

Sistema de Numeração

- Sistema de numeração – **código**
- Operação básica – **contagem**
- Grupo com um determinado número de objetos – **base (raiz)**

- **Sistemas de numeração básicos:**
  - Decimal
  - Binário
  - Octal
  - Hexadecimal

Exemplos

Sistema	Base	Algarismos
Binário	2	0,1
Ternário	3	0,1,2
Octal	8	0,1,2,3,4,5,6,7
Decimal	10	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
Duodecimal	12	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B
Hexadecimal	16	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Como os números representados em base 2 são muito extensos e, portanto, de difícil manipulação visual, costuma-se representar externamente os valores binários em outras bases de valor mais elevado (octal ou hexadecimal). Isso permite maior compactação de algarismos e melhor visualização dos valores.

Padrões de Representação

- Letra após o número para indicar a base;
- Número entre parênteses e a base como um índice do número.
- **Exemplo:**
  - Sistema Decimal – 2763**D** ou $(2763)_{10}$ ou 2763_{10}

Notação Posicional

- O objetivo principal de qualquer base numérica é a de representar números
- É a posição do algarimo (dígito) que determina seu valor
  - Ex: número com 2 e 7 => 27 ou 72
- O total do número é a soma dos valores relativos de cada número
- A formação dos números depende da quantidade de algarismos disponíveis no referido sistema (chamado Base)
  - Ex: Base decimal => 10 algarismos (0,1,2,...,8,9)

- **Exemplo:**
  - Número 5.303 na base 10 = 5303_{10}
  - Composto de 4 algarismos: 5,3,0,3
  - Valores:
    - 3 unidades = 3×10^0 = 3
    - 0 dezenas = 0×10^1 = 0
    - 3 centenas = 3×10^2 = 300
    - 5 milhares = 5×10^3 = 5.000

Total = 5.303

Notação Posicional

- Generalizando

$$N = d_{n-1} * b^{n-1} + d_{n-2} * b^{n-2} + \ldots + d_1 * b^1 + d_0 * b^0$$

d_x = dígito x do número
b = base

- Exemplo: número 3.748 na base 10

$n = 4, b=10, d_3=3, d_2=7, d_1=4, d_0=8$

$$N = 3*10^3 + 7*10^2 + 4*10^1 + 8*10^0$$

Bases

16	=>	Hexadecimal
		0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F
10	=>	Decimal: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
8	=>	Octal: 0,1,2,3,4,5,6,7
3	=>	Ternária: 0,1,2
2	=>	Binária: 0,1

- Exemplos:
  - $(1011)_2$
  - $(342)_5$
  - $(257)_8$

Bases

- Um número pode estar representado em qualquer base, a que mais usamos é a Decimal. Podemos omitir o $(...)_{10}$
- Base binária: uso interno do computador (0,1)
- Base hexadecimal (H): 8 bits. Assembly e Linguagem de Máquina

Conversão para Decimal

- Ex_1: Converter $(1110)_2$ para decimal

$(1110)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 =$

$= 8 + 4 + 2 + 0 =$

$= (14)_{10} = 14$

- Ex_2: Converter $(1043)_5$ para decimal

$(1043)_5 = 1*5^3 + 0*5^2 + 4*5^1 + 3*5^0 =$

$= 125 + 0 + 20 + 3 =$

$= (148)_{10} = 148$

Exemplos de Conversão

- Ex_1: Converter $(10011)_2$ para decimal
- Ex_2: Converter $(1210)_3$ para decimal

Exemplos de Conversão

Ex_1: Converter $(10011)_2$ para decimal

$Resp_1 = 19$

Ex_2: Converter $(1210)_3$ para decimal

$Resp_2 = 32$

Binário ⇒ Decimal

bin	dec	bin	dec
0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	10
0011	3	1011	11
0100	4	1100	12
0101	5	1101	13
0110	6	1110	14
0111	7	1111	15

Binário $\Rightarrow$ Decimal

- Faixa de valores em decimal

  1 bit (0 ou 1): 0-1

  2 bits (00,01,10,11): 0-3 (2^2-1)

  4 bits (0000-1111): 0-15 (2^4-1)

  8 bits (1111 1111): 0-255 (2^8-1)

  16 bits (1111 1111 1111 1111): 0-65535 ...

Binário $\Rightarrow$ Decimal

- Ex_1: Converter $(010000000001)_2$ para decimal
- Ex_2: Converter $(000000000001)_2$ para decimal
- Ex_3: Converter $(1111110)_2$ para decimal

Binário $\Rightarrow$ Decimal

Ex_1: Converter $(010000000001)_2$

$Resp_1 = 1025$

Ex_2: Converter $(000000000001)_2$

$Resp_2 = 1$

Ex_3: Converter $(11111110)_2$

$Resp_3 = 254$

Conversão Base B ⇒ Decimal

$$N = d_{n-1}*b^{n-1} + d_{n-2}*b^{n-2} + \ldots + d_1*b^1 + d_0*b^0$$

- Exemplo

$$(270)_8 \quad = 2 * 8^2 + 7 * 8^1 + 0 * 8^0 =$$

$$= 128 + 56 + 0 =$$

$$= (184)_{10} = 184$$

Conversão Decimal ⇒ Base B

- *Divide-se o número decimal pelo valor da base B. O resto é o algarismo procurado. Repetir enquanto quociente$\neq$0.*
- Exemplo: Converter $(45)_{10}$ para binário

45/2 = 22	resto=1	d_0
22/2 = 11	resto=0	d_1
11/2 = 5	resto=1	d_2
5/2 = 2	resto=1	d_3
2/2 = 1	resto=0	d_4
1/2 = 0	resto=1	d_5

=> $(d_5\ d_4\ d_3\ d_2\ d_1\ d_0) = (101101)_2$

Conversão Decimal ⇒ Base B

- Ex$_1$: Converter $(2754)_{10}$ para $(\ )_{16}$

  2754/16 = 172 resto=2

  172/16 = 10 resto=12=C

  10/16 = 0 resto=10=A

  ⇒ $(AC2)_{16}$ ou AC2H ou AC2h

- Ex$_2$: Converter $(483)_{10}$ para $(\ )_8$

  483/8 = 60 resto=3

  60/8 = 7 resto=4

  7/8 = 0 resto=7

  => $(743)_8$

Conversão Decimal $\Rightarrow$ Base B

- Ex_1: Converter $(610)_{10}$ para $(x)_8$
- Ex_2: Converter $(77)_{10}$ para $(x)_2$
- Ex_3: Converter $(447)_{10}$ para $(x)_{16}$

Conversão Decimal $\Rightarrow$ Base B

- Ex_1: Converter $(610)_{10}$ para $(x)_8$

$Resp_1 = (1142)_8$

- Ex_2: Converter $(77)_{10}$ para $(x)_2$

$Resp_2 = (1001101)_2$

- Ex_3: Converter $(447)_{10}$ para $(x)_{16}$

$Resp_2 = (1BF)_{16}$

Conversão Entre Qualquer Base

- Como realizar a conversão de um número de base 23 para base 7?
  - Primeiro, se converte o número da base 23 para a base 10, utilizando a fórmula anterior
  - Depois se converte o número de base 10 para a base 7

Base Octal

- Sistema de Numeração Octal
  - Neste sistema a base é 8, e os dígitos são 0,1,2,...7
  - Há uma relação especial entre o sistema octal e o sistema binário que reside no fato de que três dígitos binários representarem oito (2^3) números distintos.
  - Esta relação permite efetuar conversões entre estes sistemas de forma quase imediata como veremos adiante.

Octal para Decimal

- Conversão do sistema Octal para o decimal
  - Utilizamos o conceito básico de formação de um número já explicado.
  - Observemos o exemplo: Converter 345_8 em decimal.
  - $345_8 = 3x8^2 + 4x8^1 + 5x8^0$
  - $345_8 = 192 + 32 + 5 = 229_{10}$

29

Octal para Decimal

- Vejamos outro exemplo:
  - Converter 477_8 em decimal.

    $$477_8 = 4x8^2 + 7x8^1 + 7x8^0$$

    $$477_8 = 256 + 56 + 7 = 319_{10}$$

- _Conversão do sistema Decimal para o Octal
  - O processo é análogo ao da conversão decimal para binário, ou seja, empregar divisões sucessivas pela base.

30

Octal para Binário

- Conversão do sistema Octal para binário
  - Para realizar a conversão basta converter cada dígito octal no seu correspondente binário. Isto se deve à relação anteriormente mencionada.
  - Exemplificando. Converter 77_8 em binário.

$77_8 = 7\ 7_8 = 111\ \ 111_2$

Converter 123_8 em binário

$1\ 2\ 3_8 = 001\ \ 010\ \ 011_2$

Binário para Octal

- Conversão do sistema Binário para o Octal
  - Utiliza-se o processo inverso do anterior.
  - Separamos o número binário em grupos de três bits à partir da direita.
  - Depois, convertemos cada grupo de bits para o sistema octal.
  - Exemplificando:
  - Converter 1110010_2 em octal

Binário para Octal

- $1110010_2 = 1\ 110\ 010 = 162_8$

- Vejamos outro exemplo: Converter 10001_2 em octal.

- $10001_2 = 10\ 001 = 2\ 1_8$

- Converter 1110100_2 em octal.

- $1110100_2 = \ 1\ 110\ 100 = 164_8$

33

Base Hexadecimal

- Sistema de Numeração Hexadecimal
- Este sistema tem base 16 e portanto possui 16 dígitos.
- 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E e F são os dígitos deste sistema.
- O dígito A representa a quantidade 10, B representa 11, até o F que representa 15.

Base Hexadecimal

- Este sistema é bastante utilizado em microcomputadores tanto em hardware como em software.
- Conversão do sistema hexadecimal para o decimal.
- Novamente usamos o conceito básico de formação de um número já explicado.

35

Base Hexadecimal

- Exemplificando. Converter $2D_{16}$ em decimal.

  $2D_{16} = 2x16^1 + 13x16^0 = 32 + 13 = 45.$
- Vejamos outro exemplo. Converter $1C3_{16}$ em decimal.

  $1C3_{16} = 1x16^2 + 12x16^1 + 3x16^0 =$

  $256 + 192 + 3 = 451_{10}.$
- Conversão do sistema decimal para o hexadecimal.
- Novamente usamos divisões sucessivas.

36

Hexadecimal para Decimal

- Exemplificando. Converter 1000_{10} em hexadecimal.

1000|16

8 62|16

14 3|16

3 0 $1000_{10} = 3E8_{16}$

Decimal para Hexadecimal

- Converter 120_{10} em hexadecimal

$$\begin{array}{l} 120|16 \\ \quad 8\ 7|16 \\ \qquad 7\ 0 \qquad 120_{10} = 78_{16} \end{array}$$

- Conversão do sistema hexadecimal para o binário.
  - É análoga à conversão do sistema octal para o binário. Desta vez, precisamos de quatro bits para representar cada dígito hexadecimal.

Hexadecimal para Binário

- Exemplificando. Converter $AB3_{16}$ em binário.

A B 3 = 1010 1011 0011

- Vejamos outro exemplo. Converter $F8DD_{16}$ em binário.

F 8 D D = 1111 1000 1101 1101

39

Binário para Hexadecimal

- Conversão do sistema binário para o sistema hexadecimal.
  - Novamente é análoga à conversão do sistema octal para o binário. Desta vez agrupamos os bits de 4 em 4 à partir da direita.
  - Exemplificando. Converter 1001110_2 em hexadecimal.

  $1001110_2 = 0100\ 1110 = 4E_{16}$

  Converter 1100011011_2 em hexadecimal.

  $1100011011_2 = 0011\ 0001\ 1011 = 31B_{16}$

Divisão (Decimal → outro sistema)

- Divisão inteira (do quociente) sucessiva pela base, até que resto seja menor do que a base.

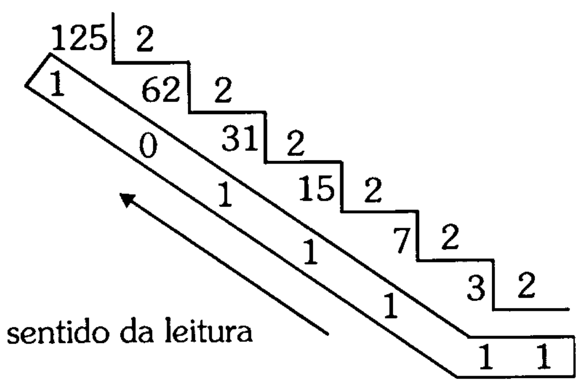
- Valor na base = composição do **último quociente** (MSB) com **restos** (primeiro resto é bit menos significativo - LSB)

Conversão entre Sistemas de Numeração

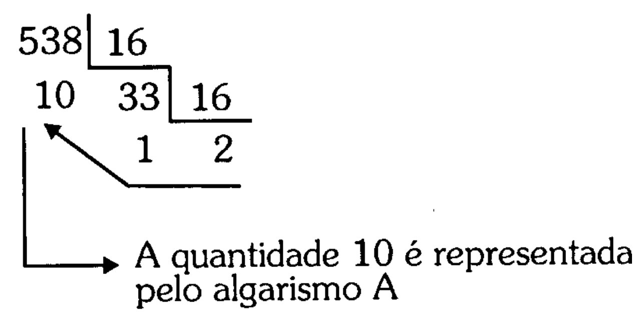
Divisão (Decimal → outro sistema)

Dividir o número por **b** (base do sistema) e os resultados consecutivas vezes.

Ex.: $(125)_{10}$ = $(?)_2$ **$(538)_{10}$ = $(?)_{16}$**



$(125)_{10} = (1111101)_2$



$(538)_{10} = (21A)_{16}$

Agrupamento de Bits

- **Sistemas octal e hexa → binário (e vice versa)**
- associando 3 bits ou 4 bits (quando octal ou hexadecimal, respectivamente) e vice-versa.

Ex.: $(1011110010100111)_2 = (\ ?\ )_{16}$ $(A79E)_{16} = (\ ?\ )_2$

$$\begin{array}{cccc} 1011 & 1100 & 1010 & 0111 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & C & A & 7 \end{array}$$

$$(1011110010100111)_2 = (BCA7)_{16}$$

$$\begin{array}{cccc} A & 7 & 9 & E \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1010 & 0111 & 1001 & 1110 \end{array}$$

$$(A79E)_{16} = (1010011110011110)_2$$

Conversão Octal → Hexa

- Não é realizada diretamente - não há relação de potências entre as bases oito e dezesseis.

- Semelhante à conversão entre duas bases quaisquer - **base intermediária** (base binária)

- Conversão em duas etapas:

1 - número: base octal (hexadecimal) → binária.

2 - resultado intermediário: binária → hexadecimal (octal).

Exemplos

Ex.:

a) $(175)_8 = (?)_{16}$

$(175)_8 = (1\ 111\ 101)_2 = (0111\ 1101)_2 = (7D)_{16}$

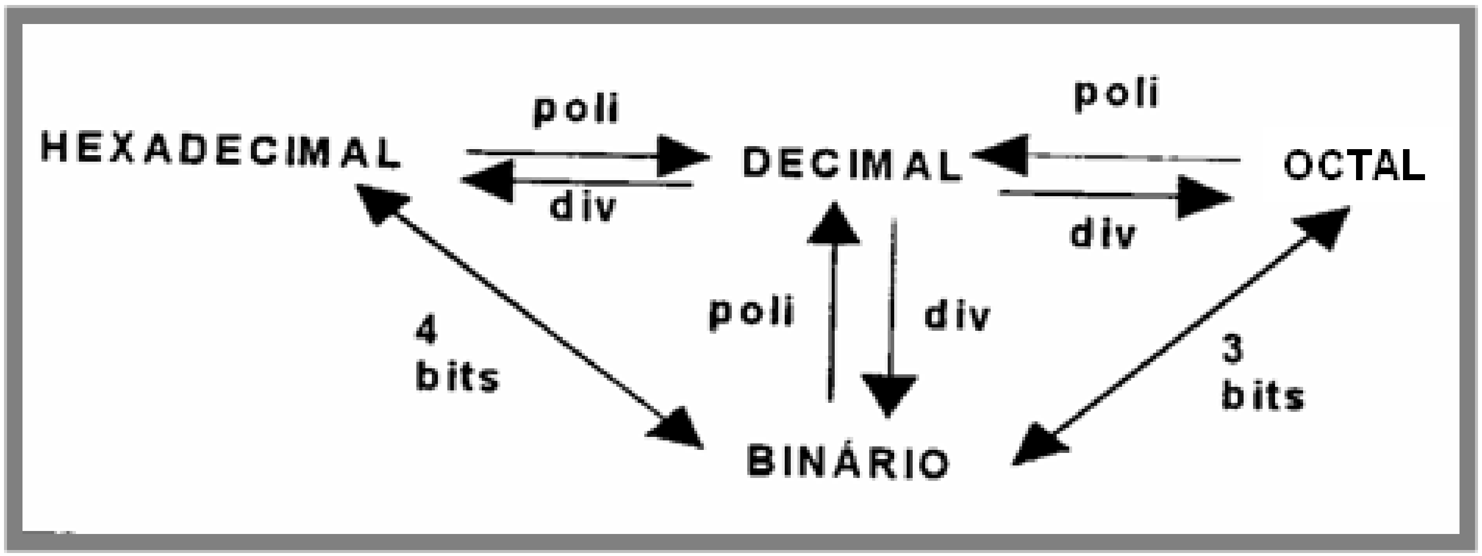
b) $(21A)_{16} = (?)_8$

$(21A)_{16} = (0010\ 0001\ 1010)_2 =$

$(001\ 000\ 011\ 010)_2 = (1\ 0\ 3\ 2)_8 = (1032)_8$

Conversão entre sistemas

- **Procedimentos básicos**: **- divisão**
  (números inteiros) **- polinômio**
  - agrupamento de bits



Números fracionários

Lei de Formação ampliada (polinômio):

$$\text{Número} = \underbrace{a_n.b^n + a_{n-1}.b^{n-1} + a_{n-2}.b^{n-2} + \ldots + a_0.b^0}_{\text{parte inteira}} + \underbrace{a_{-1}.b^{-1} + a_{-2}.b^{-2} + \ldots + a_{-m}.b^{-m}}_{\text{parte fracionária}}$$

Exemplo: $(101{,}110)_2 = (\ ?\ )_{10}$

$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} = (5{,}75)_{10}$

Decimal → outro sistema

- Operação inversa: multiplicar a parte fracionária pela base até que a parte fracionária do resultado seja zero.

Exemplo: $(8{,}375)_{10} = (\ ?\ )_2$

- parte inteira: $(8)_{10} = (1000)_2$
- parte fracionária:

$$\begin{array}{r} 0{,}375 \\ \times\ 2 \\ \hline 0{,}750 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 0{,}750 \\ \times\ 2 \\ \hline 1{,}500 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 0{,}500 \\ \times\ 2 \\ \hline 1{,}000 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \rightarrow 0{,}000 \rightarrow \text{Final}$$

$(8{,}375)_{10} = (1000{,}011)_2$

Decimal → binário

- Operação inversa: multiplicar a parte fracionária pela base até que a parte fracionária do resultado seja zero.

$0{,}6_{10} \rightarrow x_2$

0,6 * 2 = 1,2 -> 1
0,2 * 2 = 0,4 -> 0
0,4 * 2 = 0,8 -> 0
0,8 * 2 = 1,6 -> 1
0,6 * 2 = 1,2 -> 1
0,2 * 2 = 0,4 -> 0

x = 0,100110

$0{,}78125_{10} \rightarrow x_2$

0,78123 * 2 = 1,5625 -> 1
0, 5625 * 2 = 1,125 -> 1
0,125 * 2 = 0,25 -> 0
0,25 * 2 = 0,5 -> 0
0,5 * 2 = 1 -> 1

x = 0,11001

Exemplo

Mostre que:

$5,8_{10} = 101,11001100..._2$ (uma dízima).

$11,6_{10} = 1011,10011001100..._2$

a vírgula foi deslocada uma casa para a direita, pois 11,6 = 2 x 5,8 .

Exercício

Uma caixa alienígena com o número 25 gravado na tampa foi entregue a um grupo de cientistas. Ao abrirem a caixa, encontraram 17 objetos. Considerando que o alienígena tem um formato humanóide, quantos dedos ele tem nas duas mãos?

Resposta

$17_{10} = 25_{\mathbf{b}}$

$17 = 2xb^1 + 5xb^0$

$17 = 2b + 5$

$b = (17-5)/2$

$\mathbf{b = 6}$